

CLASE AUXILIAR 3

15 AGOSTO 2004

PROBLEMA 1

El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unitaria S en dos regiones S_1 y S_2 , donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 afuera. Hallar la razón de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$.

PROBLEMA 2

Considere el casquete elipsoidal S dado por

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \quad (a, b, c > 0).$$

(a) Pruebe que el plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ está dado por

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

(b) Pruebe que la recta que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y que es perpendicular al plano de la parte (a) está dado por

$$\frac{xa^2}{x_0} = \frac{yb^2}{y_0} = \frac{zc^2}{z_0}.$$

PROBLEMA 3

Hallar el flujo del campo

$$\vec{X} = (x^2z^5, y^6 + z, x^3)$$

a través de la esfera de centro en el origen y radio 1, con la normal saliente.

PROBLEMA 4 (Propuesto)

Sea S la superficie definida por $z = x\phi(\frac{y}{x})$ donde ϕ es una función derivable. Probar que todos los planos tangentes a la superficie S pasan por el origen de los ejes de coordenadas.

PROBLEMA 5 (Propuesto)

Sea \mathcal{S} una superficie cerrada acotada en \mathbb{R}^3 orientada con la normal \vec{n} saliente. Se demostrará más adelante, como aplicación del Teorema de Gauss en el espacio, que el *volumen* de la región del espacio encerrada por \mathcal{S} es igual a un tercio del flujo del campo $\vec{X} = (x, y, z)$ a través de \mathcal{S} . Calcular el volumen de la esfera sólida de radio r . Calcular el volumen del toro sólido que se obtiene haciendo girar en el espacio un círculo de radio r alrededor de un eje coplanar con él, que dista $a > r$ del centro del círculo.