



Universidad de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Matemática

**ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS
MA26A**

7 de Julio del 2004

Observaciones

Capitulos 1,2,3 redactados por el alumno Oscar Peredo a partir de un apunte de Axel Osses.

Capitulos 4,5 redactados por el alumno Andre de Laire a partir de un apunte de Axel Osses.

Capitulo 6 seccion 1 redactado por el alumno Ricardo Menares a partir de un apunte del curso de Leonardo Sanchez.

Capitulo 6 seccion 2 redactado por el alumno Ricardo Menares a partir de un apunte del curso de Felipe Alvarez.

Índice general

1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Elementales	9
1.1. Introducción	9
1.2. Integración Directa	10
1.2.1. Unicidad	11
1.3. Variables Separables	12
1.4. EDO lineal de primer orden homogénea	15
1.5. EDO lineal de primer orden no homogénea	16
1.5.1. Existencia y Unicidad	16
1.6. Ecuaciones reductibles a los casos elementales	19
1.6.1. Ecuaciones "homogéneas" de algún grado	19
1.6.2. Bernoulli	23
1.6.3. Riccati	23
1.6.4. EDO de segundo orden donde no aparece la variable dependiente	23
1.6.5. EDO de segundo orden donde no aparece la variable independiente	24
1.7. Poblaciones	24
1.7.1. Modelo de Malthus	25
1.7.2. Modelo malthusiano más realista	27
1.7.3. Modelo logístico	28
1.7.4. Modelo cazador-presa	31
1.7.5. Modelo epidemiológico	31
1.7.6. Modelo de alelos	32
1.8. Ecuaciones Exactas	32
2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden superior	38

2.1.	Ecuaciones Lineales de segundo orden	38
2.1.1.	Solucion Homogénea a coeficientes constantes	40
2.1.2.	Solucion Particular a coeficientes constantes (Método de Lagrange o Variación de Parámetros)	42
2.1.3.	Solución a coeficientes variables	45
2.1.4.	Independencia Lineal	47
2.2.	Ecuaciones Lineales de orden n	48
2.2.1.	Transformación a un sistema vectorial	49
2.2.2.	Existencia y Unicidad	50
2.2.3.	Espacios \mathcal{S} y \mathcal{H}	54
2.2.4.	Wronskiano de dimension n	56
2.2.5.	Coefficientes Variables	59
2.2.6.	Coefficientes Constantes	61
3.	Transformada de Laplace	69
3.1.	Introducción	69
3.2.	El espacio \mathcal{C}_α	71
3.3.	Funciones especiales	74
3.3.1.	Escalón de Heaviside	74
3.3.2.	Pulso entre a y b	74
3.3.3.	Delta de Dirac	75
3.4.	Transformada de una derivada	77
3.5.	Transformada de una integral	79
3.6.	Traslaciones	80
3.7.	Igualdad de transformadas	80
3.8.	Convergencia Uniforme de \mathcal{L}	81
3.9.	Diferenciabilidad e integrabilidad de \mathcal{L}	81
3.9.1.	Diferenciabilidad	81
3.9.2.	Integrabilidad	82
3.10.	Convolución	82
3.11.	Fracciones Parciales	84
3.12.	Antitransformadas	86

4. Sistemas Lineales de EDO	92
4.1. Introducción	92
4.2. Sistemas Lineales en \mathbb{R}^2	92
4.2.1. Método de sustitución	94
4.2.2. Método de Transformada de Laplace	94
4.3. Existencia y Unicidad	101
4.4. Sistemas Homogéneos	106
4.5. Soluciones Particulares	110
4.6. Exponencial de una Matriz	112
4.6.1. Caso diagonalizable	116
4.6.2. Caso no diagonalizable	121
5. Ecuaciones Diferenciales No Lineales	131
5.1. Introducción	131
5.2. Existencia y Unicidad	133
5.3. Sistemas Cuasilineales	136
5.4. Diagramas de Fase	143
5.4.1. Sistemas Lineales	156
5.5. Estabilidad con funciones de Liapunov	167
6. Series de potencias y función de Bessel	172
6.1. Soluciones en forma de series de potencias	172
6.1.1. Series de potencias	172
6.1.2. El método de la serie de potencias	175
6.1.3. Justificación del método	177
6.1.4. Método de Frobenius	179
6.2. La ecuación de Bessel en una aplicación	184

Índice de figuras

1.1.	Dos soluciones de la EDO $y' = 0$ iguales salvo constante en cada intervalo (2).	12
1.2.	Curva Braquistócrona con $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-1, 0]$, parámetro $k = 1$ y constante $C = 0$.	14
1.3.	Comportamiento de la temperatura de un cuerpo $T(t)$ frente a una temperatura ambiente constante $T_A(t) = 0$ ($k = 1, w = 1$) y constante $C = 10$.	18
1.4.	Relación entre $\sin \phi = \frac{k}{\sqrt{k^2+w^2}}$ y $\cos \phi = \frac{w}{\sqrt{k^2+w^2}}$.	19
1.5.	Comportamiento de la temperatura de un cuerpo $T(t)$ frente a una temperatura ambiente oscilante $T_A(t) = 0 + 10 \sin(t)$ ($k = 1, w = 1$) y constante $C = 10$.	20
1.6.	Bote con rapidez b cruzando un río cuya corriente tiene rapidez a .	21
1.7.	Población mundial desde 1500	25
1.8.	Población mundial y tasa de crecimiento entre 1950 y 2050	26
1.9.	Población y tasa de crecimiento de Chile entre 1950 y 2050	27
1.10.	Población y tasa de crecimiento de India y Zimbabwe entre 1950 y 2050	29
1.11.	Sistema mecánico de un resorte y una masa.	35
1.12.	Sistema mecánico de una cadena bajo el efecto de g con un extremo cayendo.	36
2.1.	Analogía electromecánica.	41
2.2.	Regimen Sobreamortiguado (arriba), Criticamente Amortiguado (centro) y Subamortiguado (abajo), con $C_1 = C_2 = 10$.	42
2.3.	Posibles valores de λ_1 y λ_2 en \mathbb{C} .	42
2.4.	Diagrama de Bifurcación de $\lambda_1(b)$ y $\lambda_2(b)$ en \mathbb{C} , con $b \rightarrow 0$.	43
2.5.	Representación de los espacios \mathcal{H} y \mathcal{S} en 2 dimensiones sobre $\mathcal{C}^2(I)$.	56
3.1.	Gráfico de la onda cuadrada.	72
3.2.	Gráfico de la onda de dientes de sierra.	72
3.3.	Región donde las funciones son de orden exponencial con $C = 100$ y $\alpha = \frac{1}{5}$.	73

3.4. Escalón de Heaviside con $a = 0$	75
3.5. Pulso entre $a = 3$ y $b = 5$	75
3.6. Distintas funciones f_n	76
4.1. Polución en dos estanques del ejemplo 4.2.1	93
4.2. Comportamiento de la polución en estanque 2 del ejemplo 4.2.2	97
4.3. Masas atmosféricas del ejemplo 4.2.3	98
4.4. Modelamiento de los amortiguadores de un auto del ejemplo 4.6.1	117
5.1. Soluciones de equilibrio para el modelo de conejos y ovejas	140
5.2. Soluciones de equilibrio del péndulo no lineal	141
5.3. Soluciones de equilibrio del péndulo linealizado en torno al origen	142
5.4. Intersección de Cónicas	143
5.5. Soluciones (5.5) y (5.6) para $k > 0$	145
5.6. Solución del sistema para una condición inicial en el plano de fases XY	146
5.7. Diagrama de fase completo para $k = 1$	147
5.8. Diagrama de fase para $k = 2$	147
5.9. Diagrama de fase para $k = -1$	148
5.10. Diagramas de fase de (5.7) para dos condiciones iniciales	149
5.11. Soluciones de (5.7) para dos condiciones iniciales	150
5.12. Unicidad de la trayectorias	150
5.13. Intersección de Recorridos	151
5.14. A la izquierda, el recorrido orientado de (5.10), y a la derecha el de (5.11)	151
5.15. Trayectorias que convergen al origen	152
5.16. Punto silla	154
5.17. Diagrama de fase del sistema (5.12). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta > 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta < 0$	155
5.18. Diagrama de fase del sistema (5.12). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta < 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta > 0$	155
5.19. Diagrama de fase del sistema (5.12) para $\alpha = 0$. A la izquierda $\beta > 0$, y a la derecha $\beta < 0$	156
5.20. Diagramas de fase de (5.13) para $\lambda_2/\lambda_1 > 1$	158
5.21. Diagramas de fase de (5.13) para $\lambda_2/\lambda_1 < 1$	159

5.22. Diagramas de fase de (5.13) para λ_2 y $\lambda_1 < 1$ de signos distintos.	159
5.23. Diagramas de fase del modelo de conejos y ovejas	161
5.24. Diagramas de fase del péndulo subamortiguado.	163
5.25. Plano traza/determinante.	165

Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Elementales

1.1. Introducción

Definición 1.1.1. Una *ecuación diferencial ordinaria (EDO)* es una identidad de la forma

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

donde x es la variable independiente e y es la incógnita (función).

Se dice que es ordinaria si se deriva con respecto a una variable. Si se deriva con respecto a varias variables, se habla de ecuación diferencial parcial.

El **orden** de una ecuación diferencial es el grado de derivación máximo que aparece en la ecuación.

El **grado** de una ecuación diferencial es el exponente de la derivación de mayor orden.

Una EDO es **lineal** si tiene grado 1, orden n y es de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0y = Q(x)$$

, con $a_i(x) \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ (coeficientes).

Si $Q(x) = 0$, la ecuación se dice **homogénea**. Si $Q(x) \neq 0$, la ecuación se dice **no homogénea**.

Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x , se dice que la EDO es a **coeficientes constantes**. De lo contrario se dice que es a **coeficientes variables**.

Si $a_n(x) = 1$, la EDO esta en forma normal (normalizada).

Ejemplo 1.1.1. $xy' + c \operatorname{sen}(x)y = \tan(x)$. EDO lineal, de orden 1, grado 1, a coeficientes variables, no homogénea.

Ejemplo 1.1.2. $y'' - 2y = 0$. EDO lineal, de orden 2, grado 1, a coeficientes constantes, homogénea.

Ejemplo 1.1.3. $2gy(1 + (y')^2) = 0$. EDO no lineal, de orden 1, grado 2, a coeficientes constantes.

En este capítulo se estudiarán 4 tipos de EDO elementales:

1. Integración directa ($y' = f(x)$).
2. Variables separables ($y' = f(x)g(y)$).
3. EDO lineal de orden 1 homogénea ($y' + \bar{a}_0(x)y = 0$).
4. EDO lineal de orden 1 no homogénea ($y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x)$).

1.2. Integración Directa

Para la EDO

$$y' = f(x)$$

se obtiene que

$$y = \int f(x)dx + C$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante.

Ejemplo 1.2.1. $y' = \text{sen}(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \int \text{sen}(x)dx + C \\ &= -\cos(x) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.2. $y' = x$:

$$\begin{aligned} y &= \int xdx + C \\ &= \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.3. $y' = \frac{1}{x}, x \neq 0$:

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{dx}{x} + C \\ &= \ln(|x|) + C \\ &= \ln(|x|) + \ln(k), (k > 0) \\ &= \ln(k|x|) \end{aligned}$$

Si $y' = f(x)$ con $x \in I$, intervalo real no vacío y conexo, se tiene para $x_0 \in I$:

$$\int_{x_0}^x y'(x)dx = \int_{x_0}^x f(x)dx, x \in I$$

Por teorema fundamental del cálculo (TFC), se tiene que

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx + y(x_0), \text{ con } y(x_0) \text{ constante.}$$

Ejemplo 1.2.4. $y' = \frac{1}{x}, x \neq 0 : x_0 = 1, x > 0 :$

$$\begin{aligned} \int_1^x y'(x)dx &= \int_1^x \frac{dx}{x} \\ y(x) - y(1) &= \ln(x) \Big|_1^x \\ y(x) &= \ln(x) - \ln(1) + y(1) \\ y(x) &= \ln(x) + y(1) \end{aligned}$$

Si $x_0 = -1, -1 < x < 0 :$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x y'(x)dx &= \int_x^{-1} \frac{dx}{x} \\ y(x) - y(-1) &= \ln(|x|) \Big|_{-1}^x \\ y(x) &= \ln(-x) + y(-1) \end{aligned}$$

1.2.1. Unicidad

Si se tiene el siguiente sistema para $x \in I$ (intervalo conexo no vacío):

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f(x) \\ y_2'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2)' &= 0 \\ y_1 - y_2 &= C \\ y_1 &= y_2 + C \end{aligned}$$

las 2 soluciones son iguales salvo una constante $C \in \mathbb{R}$ en un intervalo I . Por lo tanto, la solución de una EDO es una familia uniparamétrica de curvas en un intervalo I .

En la figura (1.1), se observa que en cada intervalo, ambas curvas presentan la misma derivada, $y' = 0$, lo que implica que son soluciones de la EDO $y' = 0$ en cada intervalo $[i, i + 1], i \in \mathbb{N}$.

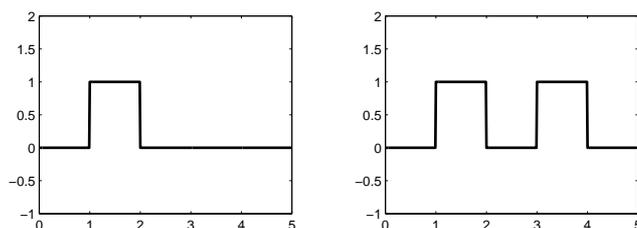


Figura 1.1: Dos soluciones de la EDO $y' = 0$ iguales salvo constante en cada intervalo (2).

1.3. Variables Separables

Para $x \in I$ (intervalo conexo no vacío), se tiene la EDO:

$$y' = f(x)g(y)$$

La solución se obtiene de la forma ($g(y) \neq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{y'}{g(y)} &= f(x) \\ \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} &= f(x) \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x) dx + C \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante.

Ejemplo 1.3.1. $y' = xy : f(x) = x, g(y) = y, y \neq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int x dx + C \\ \ln(|y|) &= \frac{x^2}{2} + C \\ |y| &= \exp\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \\ |y| &= \exp(C) \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ |y| &= k \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right), k = \exp(C) \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es $y = k \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$, con $k \neq 0$. Si agregamos la solución $y = 0$, se tendrá $y = k \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$, con $k \in \mathbb{R}$.

Cuando se considera $g(y) \neq 0$, se están eliminando posibles soluciones constantes de la EDO que no hay que despreciar.

Ejemplo 1.3.2. $y' = \cos^2(y) : f(x) = 1, g(y) = \cos^2(y), y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\cos^2(y)} &= \int dx + C \\ \int \sec^2(y) dy &= x + C \\ \tan(y) &= x + C \\ y &= \arctan(x + C), C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Finalmente, hay que agregar las soluciones constantes $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Si se integra entre $x_0 \in I$ y $x \in I$ a ambos lados de (1.1), se tiene que

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(x)dx}{g(y(x))} = \int_{x_0}^x f(x)dx$$

considerando $s = y(x) \Rightarrow ds = y'(x)dx$,

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(x)dx$$

Si $G(s)$ es primitiva de $\frac{1}{g(s)}$ y $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} G(y(x)) &= F(x) - F(x_0) + G(y(x_0)) \\ &= F(x) + C \end{aligned}$$

con $C = F(x_0) + G(y(x_0))$ constante. Las condiciones para que (1.1) son que $\frac{1}{g(y)}$ sea integrable con respecto a y y que $f(x)$ sea integrable con respecto a x .

Ejemplo 1.3.3 (Braquistócrona). Se denomina así a la curva que describe un cuerpo que se desliza desde un punto a otro de menor altura (no en la misma vertical), bajo la acción de la gravedad terrestre, en el menor tiempo posible.

□

La EDO que describe el movimiento es (con $k \in \mathbb{R}$):

$$y(1 + (y')^2) = k^2$$

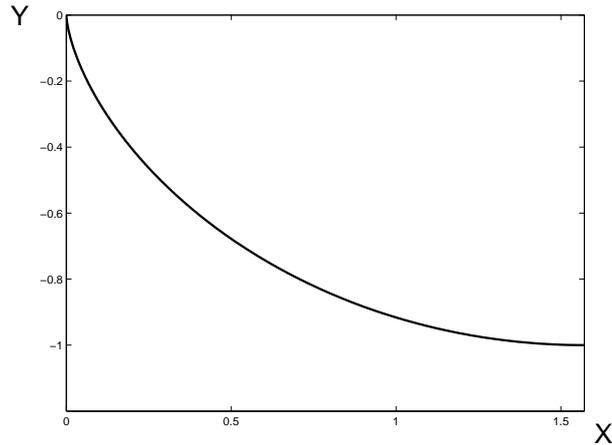


Figura 1.2: Curva Braquistócrona con $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-1, 0]$, parámetro $k = 1$ y constante $C = 0$.

utilizando el método de separación de variables, se tiene

$$y' = \underbrace{\left(\frac{k^2 - y}{y}\right)^{\frac{1}{2}}}_{g(y)} \cdot \underbrace{1}_{f(x)}$$

$$\int \frac{y^{\frac{1}{2}} dy}{\sqrt{k^2 - y}} = \int dx + C$$

haciendo el cambio de variable $y = k^2 \text{sen}^2 \theta \Rightarrow dy = 2k^2 \text{sen} \theta \cos \theta d\theta$,

$$\int \frac{k \text{sen} \theta 2k^2 \text{sen} \theta \cos \theta d\theta}{k \cos \theta} = x + C$$

$$2k^2 \int \text{sen}^2 \theta d\theta = x + C$$

$$2k^2 \int \frac{1 - \cos^2 \theta}{2} d\theta = x + C$$

$$2k^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen} 2\theta}{4} \right) = x + C$$

$$x = 2k^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen} 2\theta}{4} \right) - C$$

por lo tanto, se tiene que $x = x(\theta)$ e $y = y(\theta)$:

$$x = \frac{k^2}{2} (2\theta - \text{sen} 2\theta) - C$$

$$y = \frac{k^2}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

si $\omega = 2\theta, \omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x &= \frac{k^2}{2}(\omega - \operatorname{sen} \omega) - C \\y &= \frac{k^2}{2}(1 - \cos \omega)\end{aligned}$$

la solución es una familia biparamétrica de curvas.

1.4. EDO lineal de primer orden homogénea

Para $x \in I$ (intervalo conexo no vacío) se tiene la EDO:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Normalizando los coeficientes, es decir, con $\bar{a}_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}, a_1(x) \neq 0$:

$$y' = -\bar{a}_0(x)y$$

Se puede aplicar el método de variables separables con $f(x) = \bar{a}_0(x)$ y $g(y) = y$:

$$\begin{aligned}\ln(|y|) &= -\int \bar{a}_0(x)dx + C \\|y| &= k \exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right), k > 0 \\y &= k \exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right), k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.1. $y' \cos x + \frac{1}{\cos x}y = 0 : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\begin{aligned}y' + \frac{1}{\cos^2 x}y &= 0 \\y' + y \sec^2 x &= 0 \\y' &= -y \sec^2 x \\\int \frac{dy}{y} &= -\int \sec^2 x dx + C \\\ln(|y|) &= -\tan x + C \\y &= k \exp(\tan x), k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

1.5. EDO lineal de primer orden no homogénea

Para $x \in I$ (intervalo conexo no vacío), se tiene la ecuación:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x)$$

Normalizando ($\bar{a}_0(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $\bar{Q}(x) = \frac{Q(x)}{a_1(x)}$, $a_1(x) \neq 0$):

$$y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x)$$

En esta etapa se utiliza el método del factor integrante, que consiste en multiplicar a ambos lados de la ecuación por el factor $\exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)$, de manera que en el miembro izquierdo aparezca una expresión que resulta de derivar $y \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)$ con respecto a x :

$$\begin{aligned} y' \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right) + y\bar{a}_0(x) \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right) &= \bar{Q}(x) \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right) \\ \left(y \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)\right)' &= \bar{Q}(x) \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right) \\ y \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right) &= \int \bar{Q}(x) \exp\left(\int \bar{a}_0(s)ds\right) dx + C \end{aligned}$$

Multiplicando por $\exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right)$, la solución queda de la forma:

$$y = \underbrace{C \exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right)}_{y_h} + \underbrace{\exp\left(-\int \bar{a}_0(x)dx\right) \int \bar{Q}(x) \exp\left(\int \bar{a}_0(s)ds\right) dx}_{y_p}$$

donde y_h se dice **solución homogénea** (si $\bar{Q}(x) = 0$) e y_p se dice **solución particular** (si $\bar{Q}(x) \neq 0$).

1.5.1. Existencia y Unicidad

Para demostrar la existencia y unicidad de la solución de una EDO lineal de primer orden no homogénea con condiciones iniciales dadas, se puede ver la demostración realizada en la sección (2.2.2) para el caso $n = 1$.

Ejemplo 1.5.1 (Ley de Osmosis). La Osmosis se define basicamente como el movimiento de agua desde una solución con baja concentración de soluto (solución A) a través de una membrana semipermeable hasta una solución con alta concentración de soluto (solución B). Si $C_A(t)$ es la cantidad de agua que hay en la solución A, C_A^0 es la cantidad inicial de agua en A y C_B^0 la cantidad inicial de agua en B, la EDO que modela este fenómeno es:

$$C'_A(t) = \sigma \left(\frac{C_A^0 + C_B^0}{2} - C_A(t) \right), \sigma > 0$$

renombrando $\frac{C_A^0 + C_B^0}{2} = M$, se tiene

$$\begin{aligned} C'_A + \sigma C_A &= \sigma M \\ C'_A \exp\left(\int \sigma dt\right) + \sigma C_A \exp\left(\int \sigma dt\right) &= \sigma M \exp\left(\int \sigma dt\right) \\ C'_A e^{\sigma t} + \sigma C_A e^{\sigma t} &= \sigma M e^{\sigma t} \\ (C_A e^{\sigma t})' &= \sigma M e^{\sigma t} \\ C_A e^{\sigma t} &= \int \sigma M e^{\sigma t} dt + C \\ C_A &= C e^{-\sigma t} + \sigma M e^{-\sigma t} \int e^{\sigma t} dt \end{aligned}$$

como $\int e^{\sigma t} dt = \frac{1}{\sigma} e^{\sigma t}$, se tiene que

$$C_A(t) = C e^{-\sigma t} + M$$

con $C \in \mathbb{R}$. El resultado es una familia uniparamétrica de curvas (parámetro C). Si evaluamos en el tiempo inicial $t = 0$, se puede encontrar el valor de la constante C , es decir, $C_A(0) = C + M$ y $C_A(0) = C_A^0$, luego $C = C_A^0 - M = \frac{C_A^0 - C_B^0}{2}$. Por lo tanto, la solución es

$$C_A(t) = \left(\frac{C_A^0 - C_B^0}{2} \right) e^{-\sigma t} + \frac{C_A^0 + C_B^0}{2}$$

Ejemplo 1.5.2 (Ley de enfriamiento de Newton). Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y el medio ambiente es pequeña, el calor transferido en una unidad de tiempo hacia el cuerpo o desde el cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo (T) y el medio ambiente (T_A). La EDO que modela la variación de temperatura de un cuerpo en función del tiempo es (suponiendo T_A constante)

$$T'(t) = k(T_A - T(t))$$

donde k es una constante que depende del área, calor específico y masa del cuerpo. Si $T(0) = T_0$ es la temperatura inicial del cuerpo, y suponiendo que $T_0 > T_A$, se tiene

$$\begin{aligned} T' + kT &= kT_A \\ T' e^{kt} + kT e^{kt} &= kT_A e^{kt} \\ (T e^{kt})' &= kT_A e^{kt} \\ T e^{kt} &= k \int T_A e^{kt} dt + C \\ T &= C e^{-kt} + T_A \end{aligned}$$

evaluando en $t = 0$, se obtiene $C = T_0 - T_A$, por lo tanto

$$T(t) = (T_0 - T_A)e^{-kt} + T_A$$

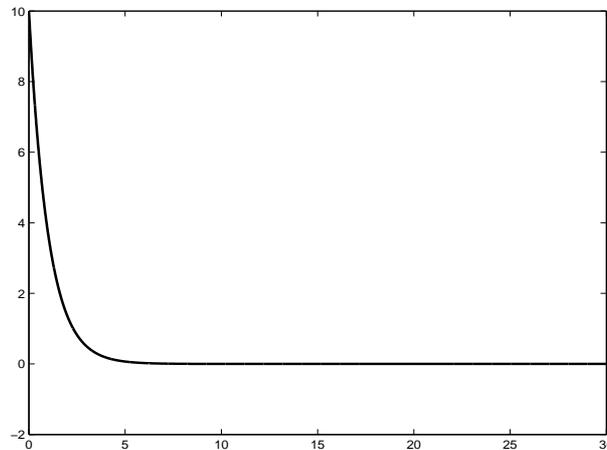


Figura 1.3: Comportamiento de la temperatura de un cuerpo $T(t)$ frente a una temperatura ambiente constante $T_A(t) = 0$ ($k = 1, w = 1$) y constante $C = 10$.

Si T_A esta en función del tiempo de la forma $T_A(t) = T_A^0 + A \text{sen}(wt)$ (oscilante) la solución se obtiene de la forma

$$T(t) = C e^{-kt} + T_A^0 + k e^{-kt} \int A \text{sen}(wt) e^{kt} dt \tag{1.1}$$

Desarrollando $\int A \text{sen}(wt) e^{kt} dt$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int A \text{sen}(wt) e^{kt} dt &= A \int \text{sen}(wt) e^{kt} dt \\ &= A \left(\frac{-1}{k} \int w \cos(wt) e^{kt} dt + \frac{1}{k} \text{sen}(wt) e^{kt} \right) \\ &= A \left(\frac{-w^2}{k^2} \int \text{sen}(wt) e^{kt} dt - \frac{w}{k^2} \cos(wt) e^{kt} + \frac{1}{k} \text{sen}(wt) e^{kt} \right) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\left(1 + \frac{w^2}{k^2}\right) \int \text{sen}(wt)e^{kt} dt = \frac{e^{kt}}{k} \left(\text{sen}(wt) - \frac{w}{k} \cos(wt)\right)$$

luego, $\int A \text{sen}(wt)e^{kt} dt = \frac{Ak}{k^2 + w^2} e^{kt} \left(\text{sen}(wt) - \frac{w}{k} \cos(wt)\right)$. Por lo tanto (1.1) queda de la forma

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak^2}{k^2 + w^2} \left(\text{sen}(wt) - \frac{w}{k} \cos(wt)\right)$$

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak}{\sqrt{k^2 + w^2}} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + w^2}} \text{sen}(wt) - \frac{w}{\sqrt{k^2 + w^2}} \cos(wt)\right)$$

Si consideramos $\text{sen } \phi = \frac{k}{\sqrt{k^2 + w^2}}$ y $\cos \phi = \frac{w}{\sqrt{k^2 + w^2}}$, se tiene

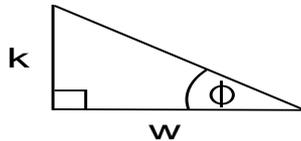


Figura 1.4: Relación entre $\text{sen } \phi = \frac{k}{\sqrt{k^2 + w^2}}$ y $\cos \phi = \frac{w}{\sqrt{k^2 + w^2}}$.

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak}{\sqrt{k^2 + w^2}} \underbrace{(\text{sen}(\phi) \text{sen}(wt) - \cos(\phi) \cos(wt))}_{-\cos(wt + \phi)}$$

Finalmente, $T(t) = \underbrace{Ce^{-kt}}_{y_h} + T_A^0 - \underbrace{\frac{Ak}{\sqrt{k^2 + w^2}} \cos(wt + \phi)}_{y_p}$

1.6. Ecuaciones reductibles a los casos elementales

1.6.1. Ecuaciones "homogéneas" de algún grado

Diferentes a las EDO lineales homogéneas, donde $Q = 0$. Son del tipo

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

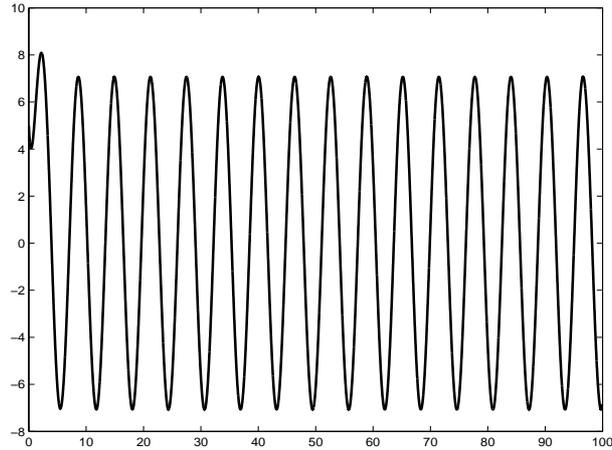


Figura 1.5: Comportamiento de la temperatura de un cuerpo $T(t)$ frente a una temperatura ambiente oscilante $T_A(t) = 0 + 10 \text{sen}(t)$ ($k = 1, w = 1$) y constante $C = 10$.

donde $f(\lambda x, \lambda y) = \pm \lambda^k f(x, y)$ y $g(\lambda x, \lambda y) = \pm \lambda^k g(x, y)$. Se dice que f y g son homogéneas de grado k .

Para resolverlas, se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \\
 &= \frac{f\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right)}{g\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right)} \\
 &= \frac{\pm x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right)}{\pm x^k g\left(1, \frac{y}{x}\right)} \\
 &= \frac{f\left(1, \frac{y}{x}\right)}{g\left(1, \frac{y}{x}\right)} \\
 &= h\left(\frac{y}{x}\right)
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = xz' + z$, se tiene que

$$\begin{aligned} xz' + z &= h(z) \\ xz' &= h(z) - z \\ \frac{z'}{h(z) - z} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{dz}{h(z) - z} &= \int \frac{dx}{x} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.1. Sobre un río, en la posición $P = (c, 0)$, un bote trata de alcanzar la orilla situada en la posición $O = (0, 0)$ como se muestra en la figura. Se quiere caracterizar la posición en el eje OY con respecto a la posición en el eje OX. La rapidez de la corriente del río es a en dirección $(0, -1)$. La rapidez del bote es b en dirección $(-\cos \theta, \sin \theta)$ apuntando hacia O . Si las coordenadas del bote en un tiempo dado son $B = (x, -y)$, la rapidez en cada eje esta dada por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -b \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= b \sin \theta - a \end{aligned}$$

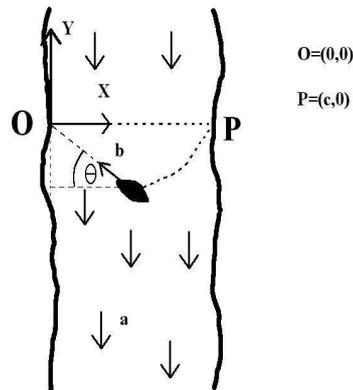


Figura 1.6: Bote con rapidez b cruzando un río cuya corriente tiene rapidez a .

Aplicando regla de la cadena a $\frac{dy}{dx}$, y recordando que $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}$ y $\sin \theta = \frac{-y}{\sqrt{y^2 + x^2}}$, se

tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\
 &= \left(\frac{-b \cos \theta}{b \operatorname{sen} \theta - a} \right) \\
 &= \frac{-a + b \left(\frac{-y}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right)}{-b \left(\frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right)} \\
 &= \frac{-a\sqrt{x^2 + y^2} - by}{-bx}
 \end{aligned}$$

esta última ecuación es homogénea de grado 1, por lo tanto (recordando el cambio de variable $z = \frac{y}{x} \Rightarrow xz' + z = y'$)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{-a\sqrt{1+z^2} - bz}{-b} \\
 xz' + z &= \frac{a}{b}\sqrt{1+z^2} + z \\
 \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{a}{bx} \\
 \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{a}{b} \ln x + C \\
 \ln(z + \sqrt{1+z^2}) &= \frac{a}{b} \ln x + \frac{a}{b} \ln k, k > 0 \\
 \ln(z + \sqrt{1+z^2}) &= \ln(kx)^{\frac{a}{b}} \\
 z + \sqrt{1+z^2} &= (kx)^{\frac{a}{b}} \\
 1 + z^2 &= (kx)^{\frac{2a}{b}} - 2z(kx)^{\frac{a}{b}} + z^2 \\
 z &= \frac{1}{2} \left[(kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{\frac{-a}{b}} \right] \\
 \frac{y}{x} &= \frac{1}{2} \left[(kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{\frac{-a}{b}} \right] \\
 y &= \frac{x}{2} \left[(kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{\frac{-a}{b}} \right]
 \end{aligned}$$

la constante k se puede calcular de la condición inicial $y(x = c) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{c}$.

1.6.2. Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es de la forma ($n \neq 0$)

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

con p, q funciones de x . Se realiza el cambio de variable $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$. Multiplicando $(1-n)y^{-n}$ a ambos lados de la ecuación, queda

$$\begin{aligned}(1-n)y^{-n}y' + p(x)(1-n)y^{1-n} &= (1-n)q(x) \\ z' + p(x)(1-n)z &= (1-n)q(x)\end{aligned}$$

que resulta ser una ecuación lineal no homogénea de primer orden normalizada.

Ejemplo 1.6.2 (Modelo Logístico de población). El modelo logístico se explica en la subsección (1.7.3).

1.6.3. Riccati

La ecuación de Riccati es de la forma

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{1.2}$$

con p, q, r funciones de x . Se realiza el cambio de variable $y = y_1 + \frac{1}{z}$, donde y_1 es solución "trivial" de (1.2) ($y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)$). Derivando con respecto a x se tiene $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$ y reemplazando en (1.2),

$$\begin{aligned}y_1' - \frac{z'}{z^2} &= p(x) \left(y_1 + \frac{1}{z} \right)^2 + q(x) \left(y_1 + \frac{1}{z} \right) + r(x) \\ y_1' - \frac{z'}{z^2} &= p(x)y_1^2 + 2p(x)\frac{y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + q(x)y_1 + \frac{q(x)}{z} + r(x) \\ y_1' - \frac{z'}{z^2} &= [p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)] + 2p(x)\frac{y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + \frac{q(x)}{z} \\ z' &= -2p(x)y_1z - p(x) - q(x)z \\ z' + (2p(x)y_1 + q(x))z &= -p(x)\end{aligned}$$

que resulta ser una EDO lineal de primer orden no homogénea en la variable z .

1.6.4. EDO de segundo orden donde no aparece la variable dependiente

En la ecuación

$$G(x, y', y'') = 0$$

no aparece la variable y explícitamente. En estos casos se realiza el cambio de variable $p = y'$, con lo cual la ecuación se transforma en

$$G(x, p, p') = 0$$

que es una EDO de primer orden. Por lo tanto, la transformación es la siguiente:

$$G(x, y', y'')=0 \text{ Una EDO de orden 2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G(x, p, p')=0 \\ y'=p \end{cases} \text{ Dos EDO orden 1}$$

1.6.5. EDO de segundo orden donde no aparece la variable independiente

En la ecuación

$$H(y, y', y'') = 0$$

no aparece la variable x explícitamente. Se realiza el cambio de variable $p = y' = \frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$, con lo cual la ecuación se transforma en

$$H\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

que es una EDO de primer orden en la variable p con variable independiente y . Por lo tanto, la transformación es :

$$H(y, y', y'')=0 \text{ Una EDO de orden 2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} H\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0 \\ y'=p \end{cases} \text{ Dos EDO orden 1, de variables independientes } x \text{ e } y$$

1.7. Poblaciones

El objetivo de esta sección es hacer un recorrido por la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias a través de un tema apasionante e interdisciplinario como es el tema de la dinámica de

poblaciones. La idea es mostrar diversas situaciones descritas por modelos de ecuaciones diferenciales (o ecuaciones de diferencias) y motivar la modelación por parte del propio alumno.

La mayoría de las veces los modelos parten de consideraciones simples e intuitivas de la realidad y, sin embargo, nos llevan a analizar y cuantificar situaciones complejas que están lejos de la comprensión inmediata, lo que nos permite reinterpretar con profundidad la realidad que los originó.

1.7.1. Modelo de Malthus

El siguiente gráfico muestra el poblamiento de la Tierra en los últimos 500 años. Se espera que para el año 2050, la población mundial crezca a más de 9×10^9 seres humanos.

Figura 1.7: Población mundial desde 1500

El modelo más sencillo para la evolución P de una población es el de una EDO lineal de primer orden homogénea (modelo malthusiano):

$$P' = \sigma(t)P \tag{1.3}$$

donde la función σ representa la evolución de la tasa de crecimiento neta de la población a través del tiempo (tasa de nacimiento menos tasa de mortalidad). La solución, para una población inicial P_0 en $t = t_0$ dada es:

$$P(t) = P(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \sigma(s) ds \right) \tag{1.4}$$

La variación de la población mundial en los últimos 50 años y la tasa de crecimiento observada se han extrapolado hasta el 2050 en el siguiente gráfico¹. Observe una ligera inflexión en la década de los 90' debido a una disminución sostenida de la tasa de crecimiento. La tasa de crecimiento

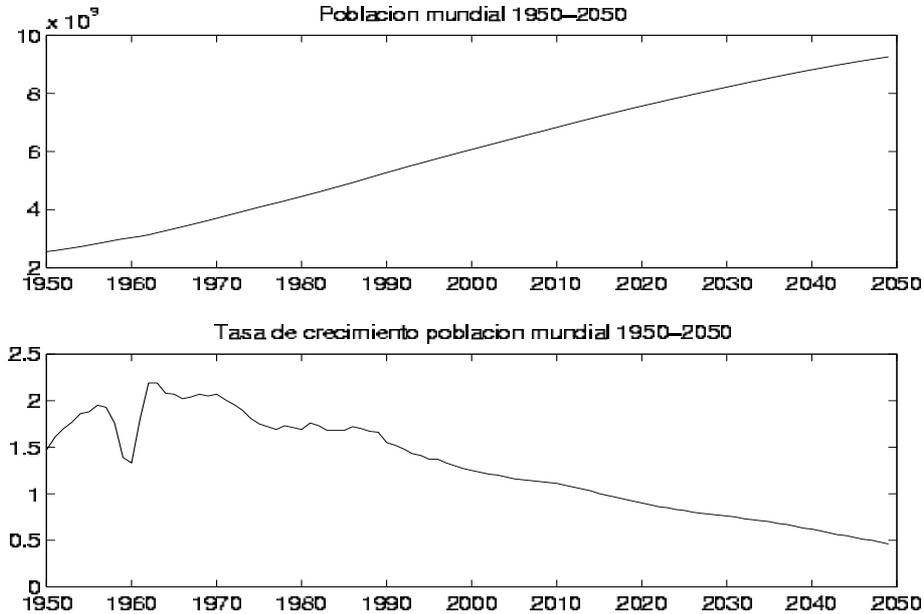


Figura 1.8: Población mundial y tasa de crecimiento entre 1950 y 2050

observada corresponde al % de crecimiento de la población cada año y calculada como la razón entre la derivada numérica de la curva de población y la población en %. La tasa de crecimiento observada se puede interpretar con el parámetro σ que introdujimos. De hecho en nuestro modelo $\frac{P'}{P} = \sigma(t)$. Si tomamos $P(t_0 = 2000) = 6 \times 10^9$ y suponemos de un análisis del gráfico que σ decrecerá linealmente en el futuro disminuyendo desde su valor actual de 1,25 % un 0,5 % cada 30 años, podemos aventurarnos a estimar la población mundial para $t = 2050$ y para $t = 2100$. En efecto, según nuestras hipótesis $\sigma(t) = -0,5\%/30(t - 2000) + 1,25\%$, entonces de (1.4)

$$P(t) = P(2000) \exp \left(\frac{-0,5\%}{30} \frac{(t - 2000)^2}{2} + 1,25\%(t - 2000) \right)$$

esto es $P(2050) \approx 9,1 \times 10^9$ habitantes. Si ahora hacemos el cálculo para $t = 2100$ obtenemos $P(2100) \approx 9,1 \times 10^9$ hbts ... el mismo valor! Esto se debe a que al evaluar en la función cuadrática que interviene en $P(t)$ obtenemos la misma imagen. Entonces, si razonamos un poco, este modelo nos permite predecir que habrá un máximo de población en el año 2075 con un valor de $P(2075) \approx 9,6 \times 10^9$ hbts.

¹U.S. Bureau of the Census, International Data Base www.census.gov/ipc/www/worldpop.html

1.7.2. Modelo malthusiano más realista

En el caso particular de un país como Chile, debemos considerar además la evolución de la inmigración neta (inmigración menos emigración) representada por una función Q . El modelo es una EDO lineal de primer orden no homogénea:

$$P' = \sigma(t)P + Q(t). \quad (1.5)$$

En este caso, la solución es

$$P(t) = P(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \sigma(s) ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t \sigma(s) ds\right) Q(s) ds. \quad (1.6)$$

Con este modelo, analicemos el impacto en el periodo 2000 – 2040 que tendría en la población chilena una inmigración que crece año a año en Q_0 y que comenzó el año digamos 2000, esto es, $Q(t) = Q_0(t - 2000)$.

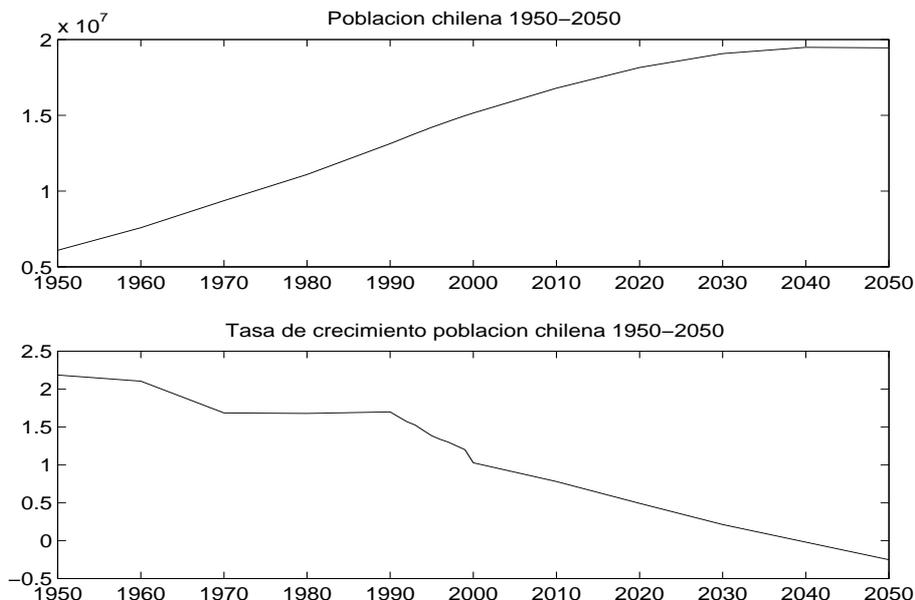


Figura 1.9: Población y tasa de crecimiento de Chile entre 1950 y 2050

En este caso $\frac{P'}{P} = \sigma + \frac{Q}{P}$ de modo que si la inmigración es despreciable frente a la población total ($\frac{Q}{P} \ll 1$), todavía es posible interpretar la tasa de crecimiento observada con σ . Del segundo gráfico deducimos $\sigma(t) = \frac{-1,0\%}{40}(t - 2000) + 1,2\%$, $P(2000) = 15,2 \times 10^6$. La parte homogénea de la solución corresponde a la evolución de la población en ausencia de inmigración. La parte particular

corresponde al impacto de la inmigración, esto es

$$P_{part} = Q_0 \int_{2000}^{2040} (s - 2000) \exp \left(\int_s^{2040} \sigma(s) ds \right) ds$$

Los cálculos se dejan al lector. Note que gracias a la forma que se asumió para $Q(t)$, la integral que involucra a $\exp(s^2)$ se puede calcular explícitamente.

Ejercicio Propuesto 1.7.1. India aporta casi un 1/6 de la población mundial actualmente, y su población continuará creciendo, aunque a una tasa cada vez menor. Modele cual sería el impacto de una epidemia de SIDA en India conociendo los datos de la población de Zimbabwé que comenzó a sufrir esa epidemia en la década de los 90'.

1.7.3. Modelo logístico

El modelo logístico se escribe

$$P' = \sigma P(M - P) \tag{1.7}$$

donde M es una población máxima alcanzable constante, en efecto, si P sobrepasa M , el lado derecho cambia de signo. Podemos obtener la solución exacta de esta ecuación (tipo Bernoulli).

Hacemos el cambio de variables $z = \frac{1}{P}$ con $z' = \frac{-P'}{P^2}$ en 1.7y obtenemos $z' = -\sigma(Mz - 1)$, esto es, $z' = -M\sigma z + \sigma$ (EDO lineal) de donde

$$\frac{1}{P} = \exp \left(- \int_{t_0}^t M\sigma(s) ds \right) \left(\frac{1}{P(t_0)} + \int_{t_0}^t \exp \left(\int_{t_0}^s M\sigma(s) ds \right) \sigma(s) ds \right)$$

Si suponemos que además σ es constante, reordenando se obtiene:

$$P = \frac{P(t_0)M}{P(t_0) + (M - P(t_0)) \exp(-M\sigma(t - t_0))} \tag{1.8}$$

de donde es fácil verificar que $P \rightarrow M$ si $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, el modelo análogo discreto:

$$P_{i+1} - P_i = \sigma P_i(M - P_i)$$

tiene un comportamiento asombrosamente más complejo. En efecto, el siguiente programa llamado *logistico.sci* calcula los puntos de equilibrio de esta ecuación de diferencias para valores de σ crecientes:

```
function {}=logistico()
// Iteraciones  p(n+1)=sigma{*}p(n){*}(M-p(n))
// N: numero de iteraciones; v: ancho de ventana
```

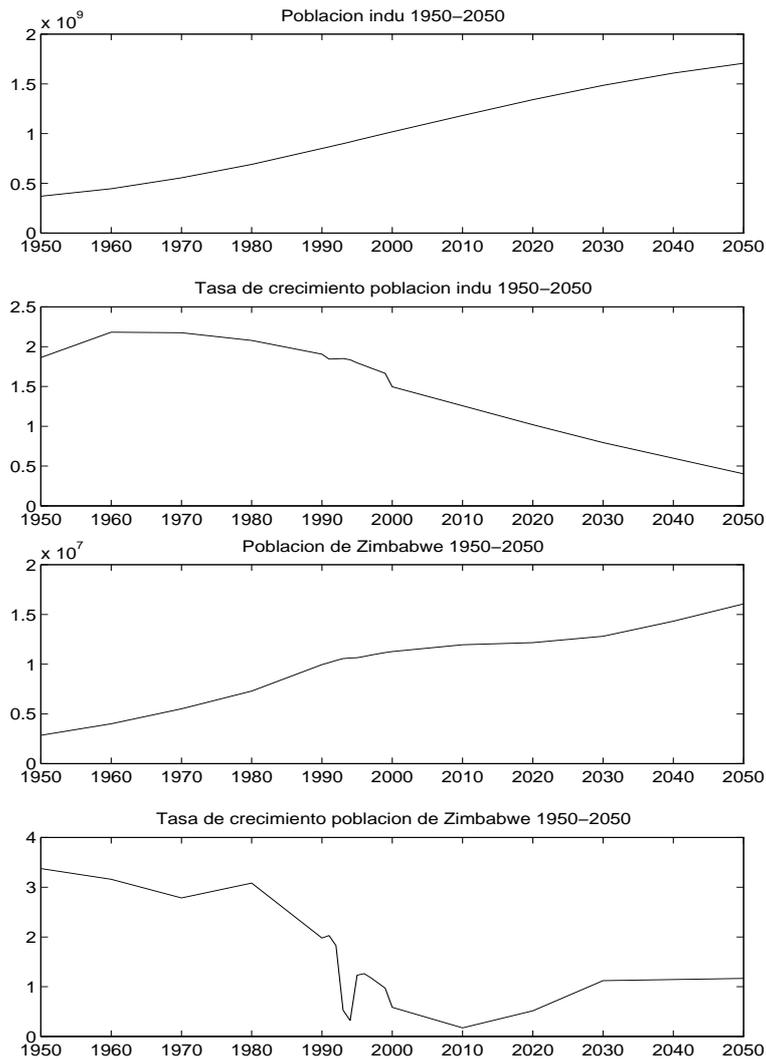


Figura 1.10: Población y tasa de crecimiento de India y Zimbabwe entre 1950 y 2050

```
// M: poblacion maxima; p: poblacion (inicial)
N=500; v=2 * (N/3); M=100;
s_inicio=1.8; s_fin=3.0; s_paso=0.002;
for sigma=s_inicio : s_paso : s_fin
    p=1.01*M;
    for i=1 : N-1
        p(i+1)=p(i)+sigma/100*p(i)*(M-p(i));
    end
    xtitle('Puntos de equilibrio de poblacin','sigma','hbts.');
```

```
plot2d(xsigma,p(N-v:N),0,"011"," ",[s_inicio 0 s_fin 140]);  
end
```

el cual se ejecuta en el ambiente *scilab*² como sigue:

```
getf('logistico.sci')  
logistico()
```

El computador nos provee el gráfico siguiente:

Observamos que aparecen sucesivamente 1,2,4,8,16,... puntos de equilibrio hasta un régimen aparentemente alternado entre orden y desorden, o más precisamente, entre periódico y caótico. En realidad, se puede demostrar que la aparición de periodos sigue un orden predeterminado:

1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 44, 36, 28, 20, 12, ..., 22, 18, 14, 10, 6, ..., 11, 9, 7, 5, 3, esto es, potencias crecientes de 2 primero y finalmente múltiplos impares de potencias decrecientes de 2.

Ejercicio Propuesto 1.7.2. Tomando el modelo logístico simplificado $P_{i+1} = \sigma P_i(1 - P_i)$, estudie numéricamente el comportamiento de este sistema discreto para $\sigma = 2$, $\sigma = 3,2$, $\sigma = 3,5$, $\sigma = 3,56$, etc. El gráfico de P_{i+1} en función de P_i resulta una parábola. Grafíquela. Ahora dibuje segmentos entre los sucesivos puntos $(P_i, P_{i+1}) - (P_{i+1}, P_{i+1}) - (P_{i+1}, P_{i+2})$ para un valor de σ dado. El diagrama resultante se conoce como el *mapeo logístico*³.

²Un link a una copia del programa científico *scilab* y una copia de este programa la puede obtener en la página del curso <http://www.dim.uchile.cl/axosses/edo.html>

³Un *applet* para este mapeo puede encontrarse en <http://www.lboro.ac.uk/departments/ma/gallery/doubling/>

1.7.4. Modelo cazador-presa

Si queremos modelar el equilibrio ecológico entre peces (x) y tiburones (y) en una región del mar donde no hay pesca podemos introducir el siguiente modelo de *Lotka-Volterra* que corresponde a un sistema de dos EDO acopladas⁴:

$$\begin{aligned}x' &= ax - bx^2 - cxy \\y' &= -ky + \lambda xy\end{aligned}$$

donde a , b , c , k y λ son constantes positivas. Los términos que aparecen en las ecuaciones se explican así: en ausencia de tiburones ($y = 0$), los peces se alimentan de plancton limitado con una población máxima a/b , lo que hace aparecer un modelo logístico. Los tiburones mueren a una tasa k en ausencia de peces ($x = 0$). La interdependencia es clara: la tasa de decrecimiento de la población de peces es proporcional (c) a la cantidad de tiburones y , recíprocamente, la tasa de crecimiento de la población de tiburones es proporcional (λ) a la población de peces.

Por el momento no tenemos las herramientas para resolver este complejo sistema no-lineal, pero podemos encontrar una relación para asegurar la coexistencia de ambas poblaciones en un equilibrio simple ($x_0 > 0, y_0 > 0$). En efecto, la condición de equilibrio es $x' = 0$ e $y' = 0$. Si $x' = 0$, entonces $x_0 = (a - cy_0)/b$. Por otro lado, si $y' = 0$, tenemos que $x_0 = k/\lambda$, de donde despejando, se obtiene $y_0 = a/c - (bk)/(\lambda c)$. Si queremos que haya tiburones, esto es $y_0 > 0$ obtenemos la condición $a\lambda > bk$ o bien $a/b > k/\lambda$, esto es la población crítica de peces que debe soportar el plancton es k/λ para que existan tiburones.

1.7.5. Modelo epidemiológico

El siguiente es un modelo epidemiológico introducido por Kermack & McKendrick en 1927⁵. Modela la composición de una población constante $N = x + y + z$ ante una enfermedad, donde $x(t)$ representa el número de personas susceptibles de contagiarse, $y(t)$ el número de infectados y $z(t)$ el número de inmunes a la enfermedad para cada $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}x' &= -\beta xy \\y' &= \beta xy - \gamma y \\z' &= \gamma y \\x(0) &= x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0, \quad z(0) = 0, \quad x_0 + y_0 = N,\end{aligned}$$

donde $\beta > 0$ es un parámetro de infección y $\gamma > 0$ la tasa de inmunización. Todo esto suponiendo que las soluciones x , y , z existen, son únicas, **no negativas**, continuas y con derivada continua para $t \geq 0$. Se pueden observar los siguientes hechos a partir del modelo:

⁴Este modelo es una adaptación quasi-linearizada de uno descrito en <http://www.industria.uda.cl/Academicos/emartinez/Dinamica/ARCHIVOS/CAZADOR.HTM>

⁵Kermack, W. O. y McKendrick, A. G. A contribution to the theory of epidemics, *Proc. Roy. Soc. (A)* 115 (1927), 700–721, 139 (1932), 55–83

- La epidemia crece inicialmente en el número de infectados si el número inicial de susceptibles supera el umbral $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$, esto es $x_0 > \rho \Rightarrow y'(0) > 0$.
- Suponiendo que existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x, y, z) = (x_\infty, y_\infty, z_\infty)$$

se puede demostrar que $y_\infty = 0$, $x_\infty = N - z_\infty$ y z_∞ es raíz de la función:

$$F(z) = N - z - x_0 \exp\left(\frac{-z}{\rho}\right).$$

Esto puede obtenerse de dividir la primera y última de las EDO.

- La raíz anterior existe y es única. Para la existencia puede usar el Teorema del Valor intermedio.

1.7.6. Modelo de alelos

Este es un modelo de frecuencias genotípicas y tiene que ver con el llamado equilibrio de Hardy-Weinberg⁶. Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} x' &= -qx + \frac{p}{2}y \\ y' &= qx - \frac{1}{2}y + pz \\ z' &= \frac{q}{2}y - pz, \end{aligned}$$

donde p, q son constantes no negativas con $p + q = 1$. El sistema anterior modela las poblaciones x de “aa”, y de “ab” y z de “bb”, donde “a” y “b” son dos alelos de un mismo gen que aparecen con frecuencias p y q en una población T .

1.8. Ecuaciones Exactas

Consideremos la familia uniparamétrica de curvas

$$f(x, y) = C, C \in \mathbb{R}$$

Suponiendo que $y = y(x)$, se tiene

$$f(x, y(x)) = C, C \in \mathbb{R}$$

⁶Hardy, G. H, Mendelian proportions in a mixed population. *Science* 28 (1908), 49–50. Weinberg, W. Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen. *Jahresh. Verein f. vaterl. Naturk.* in Württemberg 64 (1908), 368–382.

derivando esta expresión se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' &= 0 \\ y' &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\end{aligned}$$

Esto permite obtener una ecuación de primer orden en la variable y .

Definición 1.8.1. Una ecuación diferencial es exacta si es de la forma

$$y' = -\frac{M}{N}$$

,donde M y N son tales que existe una función $f(x, y) \in \mathcal{C}^2$ (f y sus derivadas parciales son de clase \mathcal{C}^1 , es decir, que las derivadas parciales de segundo orden de f existen y son continuas, al igual que f) tal que $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$. Si la ecuación es exacta, la solución es la familia $f(x, y) = c$.

Propiedad 1.8.1. La ecuación $y' = -\frac{M}{N}$ es exacta si y solo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, con $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Demostración. Si $y' = -\frac{M}{N}$ es exacta, existe $f(x, y)$ tal que $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$, por lo tanto, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Como $f \in \mathcal{C}^2$, se tiene que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. □

Ejemplo 1.8.1. $e^y + (xe^y + 2y)y' = 0$:

$$\begin{aligned}M &= e^y \\ N &= xe^y + 2y \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= e^y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^y\end{aligned}$$

es exacta, se puede aplicar el método:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int M dx + C(y) \\
 f(x, y) &= xe^y + C(y) \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^y + C'(y) \\
 N &= xe^y + C'(y) \\
 xe^y + 2y &= xe^y + C'(y) \\
 C'(y) &= 2y \\
 C(y) &= y^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x, y) = xe^y + y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$ es la familia solución de la ecuación.

En algunos casos, la ecuación $y' = -\frac{M}{N}$ no necesariamente es exacta, sin embargo, puede existir una función $\mu(x, y)$ tal que $y' = -\frac{\mu(x, y)M}{\mu(x, y)N}$ sí lo es. Esto sucederá si y solo si $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$.

Ejemplo 1.8.2. $y + (x^2y - x)y' = 0$:

$$\begin{aligned}
 M &= y \\
 N &= x^2y - x \\
 \frac{\partial M}{\partial y} &= 1 \\
 \frac{\partial N}{\partial x} &= 2xy - 1
 \end{aligned}$$

no es exacta, sin embargo, multiplicando la ecuación por $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2}$, se tiene que

$$\frac{y}{x^2} + \frac{x^2y - x}{x^2}y' = 0$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 \mu M &= \frac{y}{x^2} \\
 \mu N &= \frac{x^2y - x}{x^2} \\
 \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{1}{x^2} \\
 \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} &= \frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

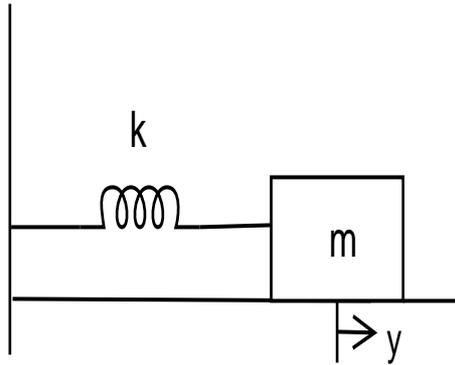


Figura 1.11: Sistema mecánico de un resorte y una masa.

Como $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$, y además $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \\ N \mu' + \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\mu'}{\mu} &= \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \\ \ln(|\mu|) &= \int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx + C \\ \mu(x) &= k \exp \left(\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx \right) \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{R}$. Análogamente, si $\mu = \mu(y)$, se tendría

$$\mu(y) = k \exp \left(- \int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dy \right)$$

Ejemplo 1.8.3 (Ley de Hooke). Se tiene el sistema indicado en la primera figura, con $k > 0$ constante de elasticidad del resorte y m la masa del cuerpo. La ley de Hooke dice que

$$my'' = -ky$$

Es decir,

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

definiendo $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, se tiene la EDO $y'' + w^2y = 0$. Si $z = y' \Rightarrow z' = \frac{dz}{dy}y'$ y reemplazando en la ecuacion se obtiene

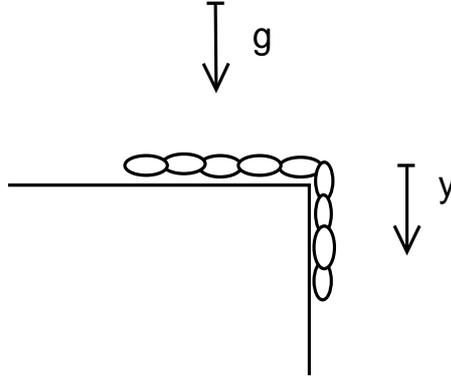


Figura 1.12: Sistema mecánico de una cadena bajo el efecto de g con un extremo cayendo.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy}z + w^2y &= 0 \\ \frac{dz}{dy}z &= -w^2y \\ \int z dz &= -w^2 \int y dy + C \\ \frac{z^2}{2} &= -w^2 \frac{y^2}{2} + C \\ (y')^2 &= -w^2 y^2 + 2C \\ y' &= \sqrt{2C - w^2 y^2} \\ \int \frac{dy}{\sqrt{2C - w^2 y^2}} &= \int dt + \phi \\ \int \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{2C} y^2}} &= \int \sqrt{2C} dt + \phi \\ \text{arc sen} \left(\frac{wy}{\sqrt{2C}} \right) &= \sqrt{2C} t + \phi \\ \frac{wy}{\sqrt{2C}} &= \text{sen}(\sqrt{2C} t + \phi) \\ y &= \frac{\sqrt{2C}}{w} \text{sen}(\sqrt{2C} t + \phi) \end{aligned}$$

con $C, \phi \in \mathbb{R}$ constantes.

Para el sistema de la segunda figura, el largo de la cadena es L y su densidad es ρ [masa / largo], por lo tanto la EDO que lo describe es

$$\begin{aligned}\rho L y'' &= \rho g y \\ y'' - \frac{g}{L} y &= 0\end{aligned}$$

definiendo $\sigma = \sqrt{\frac{g}{L}}$ se tiene la EDO $y'' - \sigma^2 y = 0$. Utilizando el mismo cambio de variable, se obtiene que

$$\begin{aligned}z \frac{dz}{dy} - \sigma^2 y &= 0 \\ z \frac{dz}{dy} &= \sigma^2 y \\ \frac{z^2}{2} &= \sigma^2 \frac{y^2}{2} + C \\ z &= \sqrt{\sigma^2 y^2 + 2C} \\ y' &= \sigma \sqrt{y^2 + a^2} \text{ con } a = \frac{2C}{\sigma^2} \\ \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a^2}} &= \sigma \int dt\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $y = a \sinh \theta$ en el lado izquierdo,

$$\begin{aligned}\int \frac{a \cosh \theta}{a \cosh \theta} d\theta &= \sigma t + \phi \\ \theta &= \sigma t + \phi\end{aligned}$$

por lo tanto, $y = a \sinh(\sigma t + \phi)$, con $\phi \in \mathbb{R}$ constante.

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden superior

2.1. Ecuaciones Lineales de segundo orden

Definición 2.1.1. Una EDO lineal de segundo orden es de la forma

$$y'' + \bar{a}_1(x)y' + \bar{a}_0(x)y = 0 \quad (H)$$

o bien

$$y'' + \bar{a}_1(x)y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q} \quad (S)$$

A coeficientes constantes se tiene que $\bar{a}_1(x) = \bar{a}_1$ y $\bar{a}_0 = \bar{a}_0$ en \mathbb{R} .

Definición 2.1.2. Un operador diferencial es un operador lineal definido como función del operador $\frac{d}{dx}$. Se definen los operadores diferenciales (con $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ constantes, $k \in \mathbb{N}$)

1. $D^0 = I$ (identidad)

2. $D = D^1 = \frac{d}{dx}$

3. $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ ($k \geq 0$)

4. $a_k D^k + a_{k-1} D^{k-1} + \dots + a_1 D^1 + a_0 D^0 = a_k \frac{d^k}{dx^k} + a_{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$

Además, si A y B son operadores diferenciales, se tiene que $A(B(f)) = (A \circ B)(f)$ si y solo si, para la función f , todo término de la función $B(f)$ es diferenciable tantas veces como requiera el

operador A . Con esto, $D^k = \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{k \text{ veces}}$ si y solo si la función a la cual aplico D^k es al menos k veces diferenciable.

Luego, las EDO (H) y (S) a coeficientes constantes quedan de la forma

$$\begin{aligned}(D^2 + \bar{a}_1 D + \bar{a}_0)y &= 0 \quad (H) \\ (D^2 + \bar{a}_1 D + \bar{a}_0)y &= \bar{Q} \quad (S)\end{aligned}$$

Definición 2.1.3. El polinomio característico de la EDO (H) o (S) a coeficientes constantes es $p(\lambda) = \lambda^2 + \bar{a}_1 \lambda + \bar{a}_0$ con $\bar{a}_1, \bar{a}_0 \in \mathbb{R}$.

Este polinomio tiene 2 raíces o valores característicos de la ecuación, λ_1 y λ_2 tales que $\bar{a}_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ y $\bar{a}_0 = \lambda_1 \lambda_2$. Se tienen 3 casos para las raíces :

1. λ_1 y λ_2 son reales y distintas.
2. λ_1 y λ_2 son reales e iguales.
3. λ_1 y λ_2 son de la forma $\sigma + iw$ y $\sigma - iw$, con $w \neq 0$ (complejos conjugados).

Si se define $p(D) = D^2 + \bar{a}_1 D + \bar{a}_0$, tratemos de darle un sentido a esta expresión. Se sabe que $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. Como D^2, D e I son operadores diferenciales, como y debe ser al menos 2 veces diferenciable, entonces se tiene que $(D - \lambda_1) \circ (D - \lambda_2) = D \circ D - D\lambda_1 - \lambda_2 D + \lambda_1 \lambda_2 = D^2 + (-\lambda_1 - \lambda_2)D + \lambda_1 \lambda_2 = p(D)$.

Por lo tanto, se tiene que

$$(D - \lambda_1) \circ (D - \lambda_2)y = \bar{Q}$$

Si se define $z = (D - \lambda_2)y$, se tiene las ecuaciones

$$\begin{aligned}(D - \lambda_1)z &= \bar{Q} \\ (D - \lambda_2)y &= z\end{aligned}$$

De la ecuación (1.5) se sabe que

$$\begin{aligned}z &= C_1 \exp(\lambda_1 x) + \exp(\lambda_1 x) \int \exp(-\lambda_1 s) \bar{Q}(s) ds \\ y &= C_2 \exp(\lambda_2 x) + \exp(\lambda_2 x) \int \exp(-\lambda_2 s) z(s) ds\end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned}y &= \underbrace{C_2 \exp(\lambda_2 x) + C_1 \exp(\lambda_2 x) \int \exp((\lambda_1 - \lambda_2)s) ds}_{\text{Solución Homogénea } y_h} \\ &\quad + \underbrace{\exp(\lambda_2 x) \int \exp((\lambda_1 - \lambda_2)s) \left(\int \exp(-\lambda_1 t) \bar{Q}(t) dt \right) ds}_{\text{Solución Particular } y_p}\end{aligned}$$

2.1.1. Solucion Homogénea a coeficientes constantes

Analizemos y_h . Se sabe que los valores de la integral $\int \exp((\lambda_1 - \lambda_2)x)dx$ son:

1. Para λ_1 y λ_2 reales y distintas : $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \exp((\lambda_1 - \lambda_2)x)$
2. Para λ_1 y λ_2 reales e iguales : x
3. Para λ_1 y λ_2 complejos conjugados : $\frac{1}{2iw} \exp(2iwx)$

Por lo tanto, los valores de y_h son:

1. $\tilde{C}_1 e^{\lambda_1 x} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_2 x}$
2. $\tilde{C}_1 e^{\lambda x} + \tilde{C}_2 x e^{\lambda x}$, con $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$
3. $\tilde{C}_1 e^{\sigma} \sin wx + \tilde{C}_2 e^{\sigma} \cos wx$, con $\lambda = \sigma \pm iw$

donde \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 son constantes distintas o no a C_1, C_2 en \mathbb{R} . Con esto, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.1.1. *La ecuación (H) o (S) a coeficientes constantes con valores característicos λ_1, λ_2 soluciones de $p(\lambda) = 0$, tiene por solución homogénea y_h :*

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 : y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} : y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
3. $\lambda_{1,2} = \sigma \pm iw \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} (w \neq 0) : y_h = C_1 e^{\sigma} \sin wx + C_2 e^{\sigma} \cos wx$

Ejemplo 2.1.1 (Analogía electromecánica). En la figura (2.1), el sistema de la izquierda representa un sistema mecánico en el cual m es la masa del objeto, k es la constante de elasticidad del resorte y b es la constante de amortiguamiento. La fuerza total del sistema, en función del tiempo se representa por $F(t)$. El sistema de la derecha representa un circuito eléctrico RCL , donde L es la inductancia de la bobina, C es la capacidad del condensador y R es la resistencia. $E(t)$ representa el voltaje aplicado en función del tiempo. La corriente que circula se representa por $\frac{dq}{dt}$. Las ecuaciones que describen cada sistema son

$$\begin{aligned} y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y &= \frac{F(t)}{m} \\ q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{CL}q &= \frac{E(t)}{L} \end{aligned}$$

Ambos sistemas están definidos por una EDO lineal de orden 2 a coeficientes constantes, si se tiene que $m \approx L, b \approx R$ y $k \approx \frac{1}{C}$ (todas constantes positivas), entonces son análogos. El polinomio característico es $\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$, y sus soluciones son $\lambda = \frac{-b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ ($\Delta = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}$). Hay 3 situaciones:

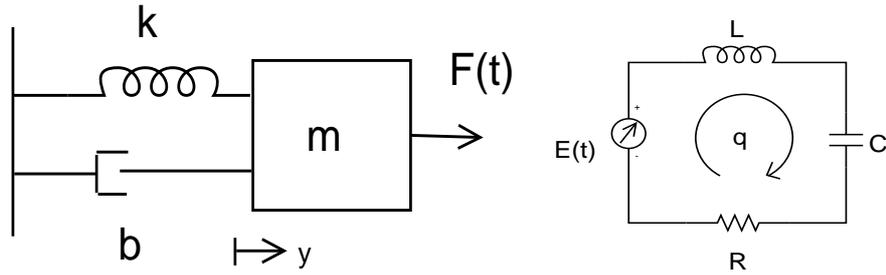


Figura 2.1: Analogía electromecánica.

1. $\frac{b^2}{4m^2} > k$, entonces las soluciones son reales y distintas.
2. $\frac{b^2}{4m^2} = k$, las soluciones son reales e iguales
3. $\frac{b^2}{4m^2} < k$, las soluciones son complejos conjugados.

Si al sistema no se le aplica fuerza o voltaje, es decir, $F(t) = 0$ o $E(t) = 0$, se tendrá en cada situación:

1. $y_h = C_1 \exp \left\{ \left(\underbrace{\frac{-b}{2m} + \sqrt{\Delta}}_{<0} \right) t \right\} + C_2 \exp \left\{ \left(\underbrace{\frac{-b}{2m} - \sqrt{\Delta}}_{<0} \right) t \right\}$ (Regimen Sobreamortiguado)
2. $y_h = C_1 \exp \left\{ \left(\frac{-b}{2m} \right) t \right\} + C_2 t \exp \left\{ \left(\frac{-b}{2m} \right) t \right\}$ (Regimen Criticamente Amortiguado)
3. $y_h = C_1 \sin(\sqrt{-\Delta}t) \exp \left\{ \left(\frac{-b}{2m} \right) t \right\} + C_2 \cos(\sqrt{-\Delta}t) \exp \left\{ \left(\frac{-b}{2m} \right) t \right\}$ o equivalentemente $y_h = C_3 \exp \left\{ \left(\frac{-b}{2m} \right) t \right\} (\sin(\sqrt{-\Delta}t) + C_4)$, pues $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ (Regimen Subamortiguado).

En la figura (2.3) se tienen los posibles valores de las raíces. En la figura (2.4) se grafica la dependencia con respecto a b , con $b \rightarrow 0$ (es decir, $\lambda_1(b)$ y $\lambda_2(b)$), y se obtiene su diagrama de bifurcación. La solución homogénea de esta EDO se representa como la combinación lineal de dos funciones y_1 e y_2 que varían en cada caso.

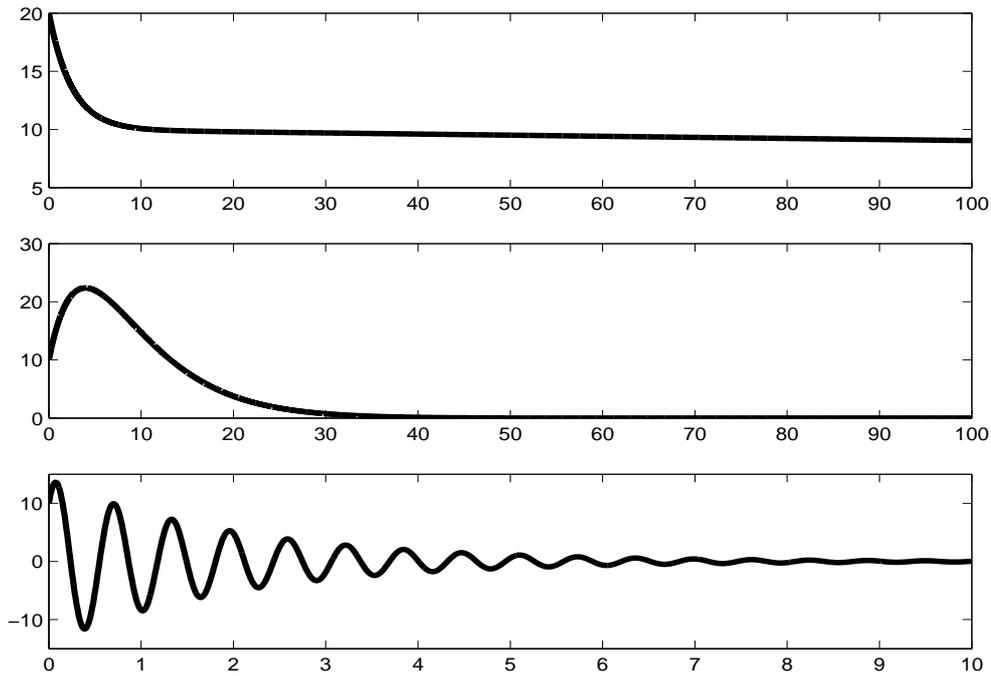


Figura 2.2: Regimen Sobreamortiguado (arriba), Críticamente Amortiguado (centro) y Subamortiguado (abajo), con $C_1 = C_2 = 10$.

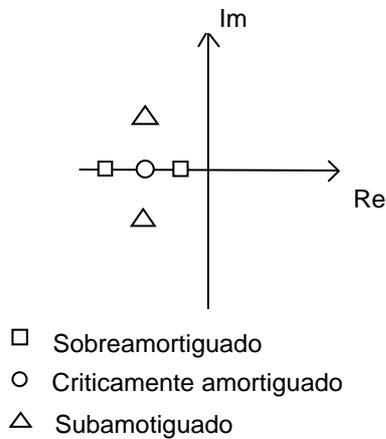


Figura 2.3: Posibles valores de λ_1 y λ_2 en \mathbb{C} .

2.1.2. Solucion Particular a coeficientes constantes (Método de Lagrange o Variación de Parámetros)

Se sabe que $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$, con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, es decir, cada función y_1 e y_2 satisface (H) para $C_1 = 1, C_2 = 0$ y $C_1 = 0, C_2 = 1$ respectivamente. Se tienen las ecuaciones:

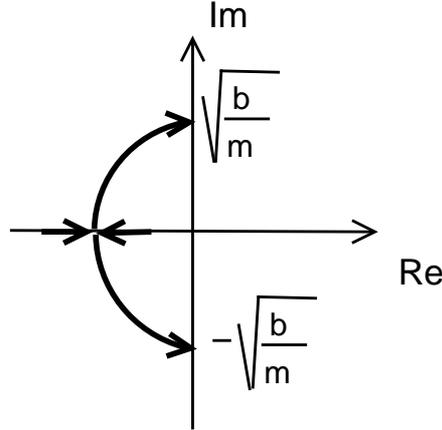


Figura 2.4: Diagrama de Bifurcación de $\lambda_1(b)$ y $\lambda_2(b)$ en \mathbb{C} , con $b \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} y_1'' + \bar{a}_1 y_1' + \bar{a}_0 y_1 &= 0 \\ y_2'' + \bar{a}_1 y_2' + \bar{a}_0 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por $C_1 \in \mathbb{R}$ la primera ecuación, por $C_2 \in \mathbb{R}$ la segunda y sumando ambas, se obtiene

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + \bar{a}_1 (C_1 y_1 + C_2 y_2)' + \bar{a}_0 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0$$

Luego, cualquier combinación lineal de y_1 e y_2 es también solución de la ecuación homogénea. Se busca una solución particular de la forma $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ son incógnitas. Reemplazando y_p en (S),

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= y_p'' + \bar{a}_1 y_p' + \bar{a}_0 y_p \\ \bar{Q} &= (C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2)'' + \bar{a}_1 (C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2)' + \bar{a}_0 (C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) \\ \bar{Q} &= (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2')' + \bar{a}_1 (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') \\ &\quad + \bar{a}_0 (C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) \\ \bar{Q} &= (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' \\ &\quad + \bar{a}_1 (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') + \bar{a}_0 (C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) \end{aligned}$$

Como se tiene (2.1), $C_1(x)(y_1'' + \bar{a}_1 y_1' + \bar{a}_0 y_1) = 0$ y $C_2(x)(y_2'' + \bar{a}_1 y_2' + \bar{a}_0 y_2) = 0$, por lo tanto

$$(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + \bar{a}_1 (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \bar{Q}$$

Imponiendo $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$, se tiene el sistema

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= \bar{Q} \end{aligned}$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{Q} \end{pmatrix}$$

Si el determinante de esta matriz es no nulo para cualquier valor de x , el sistema tiene solución única.

Definición 2.1.4 (Wronskiano). *Dada la solución homogénea $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$ y $x \in \mathbb{R}$, el Wronskiano de esa solución se define como*

$$\begin{aligned} W(x, y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \end{aligned}$$

En otras palabras, si $\forall x \in \mathbb{R}, W(x, y_1, y_2) \neq 0$, el sistema tendrá solución única de la forma

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{1}{W(x, y_1, y_2)} \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \bar{Q} & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{-\bar{Q}y_2}{W(x, y_1, y_2)} \\ C_2'(x) &= \frac{1}{W(x, y_1, y_2)} \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \bar{Q} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\bar{Q}y_1}{W(x, y_1, y_2)} \end{aligned}$$

Integrando ambas expresiones, se obtienen los valores de $C_1(x)$ y $C_2(x)$:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{\bar{Q}y_2}{W(x, y_1, y_2)} dx + K_1 \\ C_2(x) &= \int \frac{\bar{Q}y_1}{W(x, y_1, y_2)} dx + K_2 \end{aligned}$$

Y la solución particular y_p queda de la forma

$$y_p = -y_1 \int \frac{\bar{Q}y_2}{W(x, y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{\bar{Q}y_1}{W(x, y_1, y_2)} dx + K_1y_1 + K_2y_2$$

Veamos que para cualquier valor de las raíces del polinomio característico el Wronskiano es distinto de cero:

$$1. \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 : y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

$$\begin{aligned} W(x, e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}}_{>0} \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

$$2. \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} : y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \Rightarrow y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}$$

$$\begin{aligned} W(x, e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & \lambda x e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2\lambda x} (\lambda x + 1 - \lambda x) \\ &= \underbrace{e^{2\lambda x}}_{\neq 0} \end{aligned}$$

$$3. \lambda_{1,2} = \sigma \pm iw \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} (w \neq 0) : y_h = C_1 e^{\sigma x} \sin wx + C_2 e^{\sigma x} \cos wx \Rightarrow y_1 = e^{\sigma x} \sin wx, y_2 = e^{\sigma x} \cos wx$$

$$\begin{aligned} W(x, e^{\sigma x} \sin wx, e^{\sigma x} \cos wx) &= \begin{vmatrix} e^{\sigma x} \sin wx & e^{\sigma x} \cos wx \\ \sigma e^{\sigma x} \sin wx + w e^{\sigma x} \cos wx & \sigma e^{\sigma x} \cos wx - w e^{\sigma x} \sin wx \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{w}_{\neq 0} \underbrace{e^{2\sigma x}}_{\neq 0} \end{aligned}$$

2.1.3. Solución a coeficientes variables

En las secciones anteriores se vio que para una EDO de la forma (H) o (S) a coeficientes constantes, la solución homogénea es de la forma $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ y la solución particular es $y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$. En el caso de coeficientes variables, el método de los valores característicos no se puede aplicar, por lo tanto, encontrar los valores de y_1 e y_2 es un problema.

Fórmulas de Abel y Liouville

Estas formulas estan ligadas al método: "Conociendo una solución y_1 , encontrar y_2 " en una EDO a coeficientes variables. Sean y_1, y_2 soluciones de la EDO $y'' + \bar{a}_1(x)y' + \bar{a}_0(x)y = 0$. El Wronskiano para esas soluciones es

$$\begin{aligned} W(x, y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \end{aligned}$$

Derivando este valor, se tiene que

$$\begin{aligned} W'(x, y_1, y_2) &= \frac{d}{dx} (y_1 y_2' - y_1' y_2) \\ &= y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_1' y_2' - y_1'' y_2 \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \end{aligned}$$

Como y_1 e y_2 son soluciones, cumplen con las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} y_1'' + \bar{a}_1(x) y_1' + \bar{a}_0(x) y_1 &= 0 \\ y_2'' + \bar{a}_1(x) y_2' + \bar{a}_0(x) y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por y_2 la primera, por y_1 la segunda y restando ambas ecuaciones, se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} \underbrace{(y_1 y_2'' - y_1'' y_2)}_{W'(x, y_1, y_2)} + \bar{a}_1(x) \underbrace{(y_1 y_2' - y_1' y_2)}_{W(x, y_1, y_2)} &= 0 \\ W'(x, y_1, y_2) + \bar{a}_1(x) W(x, y_1, y_2) &= 0 \\ W(x, y_1, y_2) &= C \exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Esta expresión se conoce como **Formula de Abel**.

Con esta formula, se puede despejar el valor de y_2 en función de y_1 :

$$\begin{aligned} y_2' y_1 - y_1' y_2 &= C \exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) \\ y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 &= \frac{C}{y_1} \exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) \\ \underbrace{y_2' \exp\left(-\int \frac{y_1'}{y_1} dx\right)}_{\frac{1}{y_1}, y_1 \neq 0} - \frac{y_1'}{y_1} y_2 \exp\left(-\int \frac{y_1'}{y_1} dx\right) &= \frac{C}{y_1} \exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx - \int \frac{y_1'}{y_1} dx\right) \\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{C}{y_1^2} \exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) \\ y_2 &= y_1 \tilde{C} + y_1 C \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) du \end{aligned}$$

Si se supone que $y_2 = v(x)y_1$, con $v(x)$ variable, el único valor que puede tomar \tilde{C} es cero, con lo cual se tiene la **Formula de Liouville**

$$y_2 = y_1 C \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) du$$

con $v(x) = C \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int \bar{a}_1(x) dx\right) du$.

Ejemplo 2.1.2. Se tiene la EDO $x^2y'' + xy' - y = 0$ y una solución $y_1 = x$. Se pide encontrar y_2 :

$$\begin{aligned} xy_2'' - y_2 &= C \exp\left(\int -\frac{dx}{x}\right) \\ y_2' - \frac{y_2}{x} &= \frac{C}{x^2} \\ \left(\frac{y_2}{x}\right)' &= \frac{C}{x^3} \\ \frac{y_2}{x} &= \frac{C}{-2x^2} + \underbrace{\tilde{C}}_{=0} \\ y_2 &= \frac{\bar{C}}{x}, \bar{C} = \frac{-C}{2} \end{aligned}$$

Al evaluar y_2 en la EDO, se verifica que sea solución de esta: $\frac{2}{x^3}x^2 - \frac{1}{x^2}x - \frac{1}{x} = 0$

2.1.4. Independencia Lineal

Definición 2.1.5. Sea I un intervalo real (abierto, cerrado, semiabierto, semicerrado). Se define $\mathcal{C}^0(I)$ como el conjunto de funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ con f continua en el intervalo I . Se define $\mathcal{C}^n(I)$ como el conjunto de funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ con $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ continuas en el intervalo I .

Este tipo de conjuntos tiene estructura de espacio vectorial ya que para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ y todo real λ , se cumple que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Definición 2.1.6. Las funciones y_1, \dots, y_k en $\mathcal{C}^n(I)$ son linealmente independientes (l.i.) si se cumple que ,

$$\begin{aligned} \forall x \in I, C_1y_1(x) + \dots + C_ky_k(x) &\equiv 0 \text{ (función nula)} \\ \text{entonces} \\ C_1 = \dots = C_k &= 0 \text{ (escalar nulo)} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.3. Veamos que $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$ son l.i. Si se tiene la igualdad $C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$, derivandola con respecto a x se obtiene $C_1 \cos x - C_2 \sin x = 0$, luego si el sistema de estas dos igualdades tiene solución única, las funciones son l.i. :

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de la matriz vale $-\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$ para todo $x \in I$, el sistema tiene solución única, por lo tanto $C_1 = C_2 = 0$ (notar que el Wronskiano de ambas funciones coincide con el determinante de la matriz).

En general, para cualquier par de funciones $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^n(I)$, se tiene la siguiente propiedad:

Propiedad 2.1.1. Dadas dos funciones $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^n(I)$, si $W(x_0, y_1, y_2) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$, entonces y_1 e y_2 son linealmente independientes.

Observación. Existen puntos donde la combinación lineal se anula sin que se anulen los coeficientes. En el ejemplo (2.1.3), basta con evaluar en $x_0 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Definición 2.1.7. Las funciones y_1, \dots, y_k en $\mathcal{C}^n(I)$ son linealmente dependientes (l.d.) si existen constantes $C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\forall x \in I, C_1 y_1(x) + \dots + C_k y_k(x) \equiv 0$.

En el caso de la dependencia lineal, no se puede utilizar el Wronskiano como método de prueba, es decir, la implicancia $\forall x \in I, W(x_0, y_1, y_2) = 0 \Rightarrow y_1$ e y_2 son l.d.. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.4. Sean $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$. Para ver que son l.i. basta con evaluar la expresión $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ en $x = 1$ y $x = -1$ y se tendrán las ecuaciones $C_1 + C_2 = 0$ y $-C_1 + C_2 = 0$, con lo cual $C_1 = C_2 = 0$. Ahora, veamos que $\forall x \in I, W(x, y_1, y_2) = 0$. El Wronskiano tiene 2 posibles valores, si $x \geq 0$, $\begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$, o si $x < 0$, $\begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$. Con esto se prueba que la implicancia no se tiene.

2.2. Ecuaciones Lineales de orden n

Las definiciones de la subsección anterior se pueden extender a espacios vectoriales de vectores de funciones o matrices de funciones.

Definición 2.2.1. $\mathcal{C}^n(I)^m = \underbrace{\mathcal{C}^n(I) \times \dots \times \mathcal{C}^n(I)}_{m \text{ veces}} = \{ \text{vectores de } m \text{ funciones continuamente derivables en el intervalo } I \text{ hasta el orden } n \}$

$\mathcal{C}^n(I)^{m \times k} = \{ \text{matrices de } m \times k \text{ funciones continuamente derivables en el intervalo } I \text{ hasta el orden } n \}$

Estos conjuntos también tienen estructura de espacio vectorial para la suma y ponderación por escalar componente a componente. La integración de elementos de estos espacios se define de la forma

$$\int \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int f_1 \\ \vdots \\ \int f_m \end{pmatrix}$$

$$\int \begin{pmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \dots & f_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int f_{1,1} & \dots & \int f_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int f_{m,1} & \dots & \int f_{m,k} \end{pmatrix}$$

La derivación es análoga.

Definición 2.2.2. Una EDO lineal de orden n es de la forma

$$y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_0(x)y = 0 \quad (H)$$

o bien

$$y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q} \quad (S)$$

A coeficientes constantes se tiene que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \bar{a}_i(x) = \bar{a}_i$ en \mathbb{R} .

Nos interesa encontrar la solución general, es decir, las condiciones de existencia, unicidad (bajo condiciones iniciales) y los métodos para encontrarla. Para la existencia y unicidad, se estudiará el problema de Cauchy, el cual consiste en encontrar la solución de una EDO lineal de orden n en un intervalo I no reducido a un punto, dado que para un cierto $x_0 \in I$, se conocen $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$, es decir, se conocen las condiciones iniciales del problema. La idea es demostrar que para cualquier elemento de I y para cualquier elección de las condiciones iniciales, existe una única solución que satisface la EDO.

2.2.1. Transformación a un sistema vectorial

Se realiza el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Derivando cada nueva variable, se tiene:

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) &= y''(x) = z_3(x) \\ &\vdots \\ z_n'(x) &= y^{(n)}(x) = -\bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) - \dots - \bar{a}_0(x)y(x) + \bar{Q} \\ &= -\bar{a}_{n-1}(x)z_n(x) - \dots - \bar{a}_0(x)z_1(x) + \bar{Q} \end{aligned}$$

Con esto, el sistema queda de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}'}_{\vec{z}'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{a}_0(x) & -\bar{a}_1(x) & -\bar{a}_3(x) & \dots & -\bar{a}_{n-1}(x) \end{pmatrix}}_{A(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{\vec{z}(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{Q} \end{pmatrix}}_{\vec{b}(x)} \quad (2.1)$$

Si se tienen las condiciones iniciales, es decir, $y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ equivale a tener las condiciones iniciales en el sistema $z_1(x_0), \dots, z_n(x_0)$ y el problema se escribe

$$\begin{aligned} \vec{z}'(x) &= A(x)\vec{z}(x) + \vec{b}(x) \\ \vec{z}(x_0) &\quad (\text{condiciones iniciales}) \end{aligned}$$

con $x \in I$ intervalo no reducido a un punto.

2.2.2. Existencia y Unicidad

Teorema 2.2.1. Sea $T > 0$ y $I = [x_0, x_0 + T]$ para un $x_0 \in \mathbb{R}$ dado. Sea $f \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R}^m)$, es decir, $f(x, y)$ es continua con respecto a x e y , donde y es un vector de m funciones a determinar. Sea además $y(x_0) \in \mathbb{R}^m$ un vector cualquiera. Si f es Lipschitziana con respecto a la segunda variable, (es decir, $\exists L > 0$ tal que $\forall x \in I, |f(x, y) - f(x, z)| \leq L\|y - z\|$, con $\|h\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m h_i^2}$ para todo $h \in \mathbb{R}^m$) entonces existe una única solución $y \in \mathcal{C}^0(I)^m$ del problema de Cauchy.

Demostración. El problema es de la forma $y' = f(x, y(x)), x \in I$ (forma diferencial), integrando entre x_0 y x se tiene que $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds$ (forma integral). Se define el operador $\Phi : \mathcal{C}^0(I)^m \rightarrow \mathcal{C}^0(I)^m$ de la forma $y(x) \rightarrow \Phi(y) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds$. Se consideraran equivalentes las notaciones $\Phi(x, y)$ con $\Phi(y)$.

Un punto fijo para Φ es una función $\bar{y} \in \mathcal{C}^0(I)^m$ tal que $\forall x \in I, \Phi(x, \bar{y}) = \bar{y}(x)$, y si es única, hay solución única.

Recordemos que en \mathbb{R} se cumple que:

1. Toda sucesión de Cauchy es convergente.
2. Una función f es contractante en una parte cerrada $C \subset \text{Dom}(f)$ si $\exists K \in (0, 1), \forall x, y \in C, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Si $f : C \rightarrow C$ es contractante con C una parte cerrada, entonces existe un único $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) = x_0$.

En esta demostración utilizaremos el siguiente teorema (sin demostración):

Teorema 2.2.2. En el espacio $\mathcal{C}^0([x_0, x_0 + T])^m$, con la norma del supremo ($\|f\|_\infty = \sup_{x \in [x_0, x_0 + T]} |f(x)|$), todas las sucesiones de Cauchy son convergentes.

Corolario 2.2.1. Si Φ es contractante de constante K , entonces existe un único punto fijo.

Demostración. Análoga al caso en \mathbb{R} . Tomando la sucesión (f_k) que cumple con $f_{k+1} = \Phi(f_k)$, se tiene que (f_k) es sucesión de Cauchy. Observemos primero las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \|f_3 - f_2\|_\infty &= \|\Phi(f_2) - \Phi(f_1)\|_\infty \leq K\|f_2 - f_1\|_\infty \\ \|f_4 - f_3\|_\infty &= \|\Phi(f_3) - \Phi(f_2)\|_\infty \leq K\|f_3 - f_2\|_\infty \leq K^2\|f_2 - f_1\|_\infty \\ &\vdots \\ \|f_{k+1} - f_k\|_\infty &= \|\Phi(f_k) - \Phi(f_{k-1})\|_\infty \leq \dots \leq K^{k-1}\|f_2 - f_1\|_\infty \end{aligned}$$

Y por lo tanto para $m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_\infty &\leq \|f_n - f_{n-1}\|_\infty + \|f_{n-1} - f_{n-2}\|_\infty + \dots + \|f_{m+1} - f_m\|_\infty \\ &\leq K^{n-2}\|f_2 - f_1\|_\infty + \dots + K^{m-1}\|f_2 - f_1\|_\infty \\ &\leq \left(\sum_{i=m-1}^{n-2} K^i \right) \|f_2 - f_1\|_\infty \end{aligned}$$

como $\sum_{i=m-1}^{n-2} K^i = \frac{K^{n-1} - K^{m-1}}{K - 1} \leq \frac{K^{m-1}}{1 - K} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ (pues $0 < K < 1$). Con esto, se

tiene que $0 \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \left(\sum_{i=m-1}^{n-2} K^i \right) \|f_2 - f_1\|_\infty \rightarrow 0$, por lo tanto, (f_k) es una sucesión de

Cauchy. Por el teorema (2.2.2), la sucesión (f_k) converge a un límite que llamaremos \bar{f} y por lo tanto $\bar{f} = \lim f_k = \lim \Phi(f_{k-1}) = \Phi(\lim f_{k-1}) = \Phi(\bar{f})$. Las últimas desigualdades se tienen ya que como Φ es contractante, implica que es continua en el conjunto donde es contractante. El hecho de que el conjunto C donde es contractante la función garantiza que el límite está dentro del conjunto y que puede ser alcanzado por Φ . \square

Con lo anterior se tiene que:

$$|\Phi(x, y(x)) - \Phi(x, z(x))| = \left| y(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds - z(x_0) - \int_{x_0}^x f(s, z(s)) ds \right|$$

como $\Phi(x, y(x)) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$, la constante $y(x_0)$ debe ser fija (dato inicial y_0) para todas las funciones en $\mathcal{C}^0(I)^m$ y además, la norma pasa al interior de la integral por la propiedad $f \leq |f| \Rightarrow \int f \leq \int |f| \Rightarrow |\int f| \leq \int |f| = \int |f|$, con lo que queda

$$\begin{aligned} |\Phi(x, y(x)) - \Phi(x, z(x))| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y(s) - z(s)| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x \exp(2L(s - x_0)) (\exp(-2L(s - x_0)) |y(s) - z(s)|) ds \end{aligned}$$

definiendo $\|f\|_{\infty,L} = \sup_{x \in I} \exp(-2L(x - x_0))|f(x)|$,

$$\begin{aligned} |\Phi(x, y(x)) - \Phi(x, z(x))| &\leq L\|y - z\|_{\infty,L} \int_{x_0}^x \exp(2L(s - x_0)) ds \\ &= L\|y - z\|_{\infty,L} \frac{1}{2L} (\exp(2L(x - x_0)) - \exp(-2L)) \\ &\leq \frac{1}{2}\|y - z\|_{\infty,L} \exp(2L(x - x_0)) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\exp(-2L(x - x_0))|\Phi(x, y(x)) - \Phi(x, z(x))| \leq \frac{1}{2}\|y - z\|_{\infty,L}$$

tomando el supremo sobre los $x \in I$,

$$\|\Phi(\cdot, y(\cdot)) - \Phi(\cdot, z(\cdot))\|_{\infty,L} \leq \frac{1}{2}\|y - z\|_{\infty,L}$$

por lo tanto $\Phi(\cdot, y(\cdot))$ es contractante. Por el corolario (2.2.1), existe un unico punto fijo para $\Phi(\cdot, y(\cdot))$, llamado \bar{y} , con lo cual $\forall x \in I, \Phi(x, \bar{y}(x)) = \bar{y}(x)$. \square

Observación. 1. Se denomina a (2.2) "solución fuerte" y a (2.3) "solución debil".

$$y' = f(x, y(x)) \tag{2.2}$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \tag{2.3}$$

En principio, (2.2) y (2.3) no son equivalentes, pues no se sabe si y es continua. A posteriori, una vez que se sabe que la solución de (2.3) es continua, se sabe que la solución de (2.2) es continua.

2. Es posible hacer la misma demostración si f es sólo continua por pedazos con respecto a la segunda variable.
3. Para una EDO lineal de orden n , se tiene que

$$f(x, \vec{z}(x)) = A(x)\vec{z}(x) + b(x)$$

con $\vec{z}(x_0)$ el vector de condiciones iniciales, y $A(x)$ y $b(x)$ de la forma explicitada en (2.1), la continuidad de f (respectivamente continuidad por pedazos de f) es equivalente a la continuidad de $\bar{Q}_i(x)$ y $\bar{a}_i(x)$ para todo $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ (respectivamente continuidad por pedazos de $\bar{Q}_i(x)$ y $\bar{a}_i(x)$ para todo $i \in \{0, \dots, n - 1\}$). La continuidad de f con respecto a la segunda variable es directa. La Lipschitzianidad de f se verifica:

$$\begin{aligned} |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| &\leq |A(x)(z(x) - y(x)) + b(x) - b(x)| \\ &\leq |A(x)(z(x) - y(x))| \end{aligned}$$

Como $|Ay|^2 = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} y_j \right)^2$ y por Cauchy-Schwarz, $\left| \sum_j a_{ij} y_j \right|^2 = | \langle a_i, y \rangle |^2 \leq \left(\sum_j a_{ij}^2 \right) \left(\sum_j y_j^2 \right) = \left(\sum_j a_{ij}^2 \right) |y|^2$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| &\leq |A(x)(z(x) - y(x))| \\ &\leq \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2(x)} |y(x) - z(x)| \\ &\leq \underbrace{\left(\sup_{x \in [x_0, x_0+T]} \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2(x)} \right)}_L |y(x) - z(x)| \\ &\leq L|y(x) - z(x)| \end{aligned}$$

Por lo tanto el teorema es valido para EDOs lineales de orden n .

4. El teorema es valido en los siguientes casos (verificar):
 $[x_0, x_0 + T], [x_0, \infty[, [x_0 - T, x_0],]x_0 - T, x_0],]-\infty, x_0]$.
5. En el diagrama de fases (ver seccion (5.4)) las curvas cubren todo el espacio y no se intersectan sobre una curva que se cierra sobre si misma. Ademas, en los sistemas lineales existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|\tilde{y} - y\|_\infty \leq C\|\tilde{y}_0 - y_0\|$, es decir, si las condiciones iniciales son parecidas, entonces las soluciones lo son.
6. Si un sistema homogéneo (EDO linela orden n) parte con condiciones nulas se mantiene siempre (dentro del intervalo I) en reposo.

En resumen, se tiene el teorema:

Teorema 2.2.3 (Existencia y Unicidad). *El problema de Cauchy*

$$\begin{cases} (S) y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x), x \in I \\ (C.I.) y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) \text{ dados} \end{cases}$$

, donde I es un intervalo real no reducido a un punto, las funciones $\bar{a}_i(x), \bar{Q}(x)$ son continuas en I (respectivamente continuas por pedazos en I), para cada $x_0 \in I$ y para cada vector de condiciones iniciales, se tiene una solución única $y(x)$ con $x \in I$ tal que $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ son continuas en I e $y^{(n)}$ es continua en I (respectivamente continuas por pedazos en I).

Observación. 1. Si $\bar{Q}(x) = 0, y(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, entonces $y \equiv 0$

2. Si y, z son soluciones de (S) y $y(x_0) = z(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) = z^{(n-1)}(x_0)$, entonces $y = z$.

2.2.3. Espacios \mathcal{S} y \mathcal{H}

Vamos a estudiar la estructura de la solución general de (S). Para ello comenzamos con la homogénea:

$$y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \bar{a}_0(x)y = 0$$

Definición 2.2.3. $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{C}^n(I) : y \text{ es solución de (S)}\}$

Definición 2.2.4. $\mathcal{H} = \{y \in \mathcal{C}^n(I) : y \text{ es solución de (H)}\}$

Teorema 2.2.4. \mathcal{H} es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^n(I)$ de dimensión n .

Demostración. Claramente $0 \in \mathcal{H}$. Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$. Como $y_1^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + \bar{a}_0(x)y_1 = 0$, ponderando por $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $(\lambda y_1)^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)(\lambda y_1)^{(n-1)} + \cdots + \bar{a}_0(x)(\lambda y_1) = 0$, luego $\lambda y_1 \in \mathcal{H}$. Al sumar las evaluaciones de (H) en y_1 e y_2 se tiene que $(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) + \bar{a}_{n-1}(x)(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \cdots + \bar{a}_0(x)(y_1 + y_2) = 0$, lo que equivale a $(y_1 + y_2)^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \cdots + \bar{a}_0(x)(y_1 + y_2) = 0$, por lo tanto $y_1 + y_2 \in \mathcal{H}$ y \mathcal{H} es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^n(I)$.

Vamos a construir una base de \mathcal{H} , llamada base canónica, es decir, n funciones l.i. y_1, \dots, y_n y que generan \mathcal{H} . Sea y_i una solución de (H) con condiciones iniciales $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$ (solo 0 y un 1 en la posición i -ésima), es decir,

$$\begin{aligned} y_i(x_0) &= 0 \\ y_i'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ y_i^{(i-1)}(x_0) &= 1 \\ &\vdots \\ y_i^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Probemos que $\{y_1, \dots, y_n\}$ es l.i. : para todo $x \in I$ se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) &= 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \cdots + \alpha_n y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \forall x \in I$$

Para $x = x_0$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, por lo tanto son l.i.

Probemos que $\{y_1, \dots, y_n\}$ genera \mathcal{H} . Sea $y_h \in \mathcal{H}$. Demostremos que existen constantes $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ no todas nulas tales que para todo $x \in I$,

$$y_h(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \dots + \beta_n y_n(x)$$

Derivando esa expresion hasta la $(n-1)$ -esima derivada, se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_h(x) \\ y_h'(x) \\ \vdots \\ y_h^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \forall x \in I$$

Evaluando en $x = x_0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_h(x_0) \\ y_h'(x_0) \\ \vdots \\ y_h^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Entonces $\beta_i = y_h^{(i-1)}(x_0)$. En principio los β_i dependen de x_0 , hay que demostrar que no dependen. Sea $z_h \in \mathcal{H}$ tal que $z_h(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \dots + \beta_n y_n(x), \forall x \in I$. Como y_h, z_h son soluciones de (H) se tiene que

$$\begin{aligned} y_h(x_0) &= \beta_1 = z_h(x_0) \\ y_h'(x_0) &= \beta_2 = z_h'(x_0) \\ &\vdots \\ y_h^{(n-1)}(x_0) &= \beta_n = z_h^{(n-1)}(x_0) \end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad, $y_h = z_h$. □

Si x es un elemento y A un conjunto, recordemos la notación $x + A = \{x + a : a \in A\}$.

Teorema 2.2.5. Si y_p es solución de (S) entonces $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{H}$.

Geoméricamente quiere decir que \mathcal{S} es un desplazamiento por el vector y_p de \mathcal{H} .

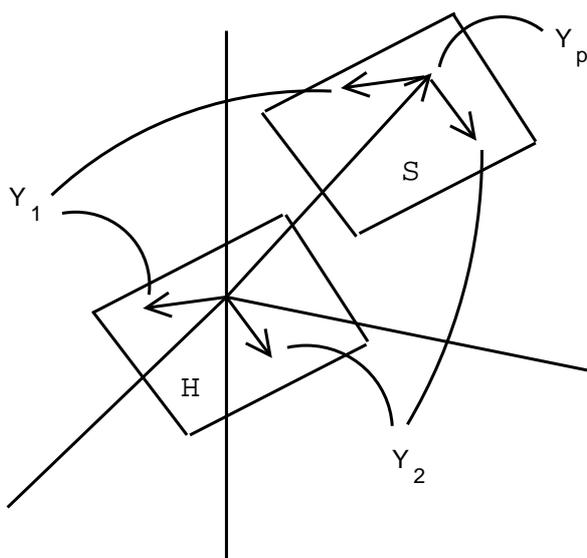


Figura 2.5: Representación de los espacios \mathcal{H} y \mathcal{S} en 2 dimensiones sobre $\mathcal{C}^2(I)$.

Demostración. Vamos a demostrar que toda solución de (S) se puede escribir como suma de y_p y una solución de (H). Sea y solución de (S). Se tiene que $y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}$ y que $y_p^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_0(x)y_p = \bar{Q}$. Si ambas expresiones se restan queda $(y - y_p)^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)(y - y_p)^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_0(x)(y - y_p) = 0$, por lo tanto $y - y_p \in \mathcal{H}$ y como $y = \underbrace{y_p}_{\in \mathcal{S}} + \underbrace{(y - y_p)}_{\in \mathcal{H}}$,

se tiene el resultado. \square

Corolario 2.2.2. *La solución general de \mathcal{S} se escribe de la forma*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + y_p$$

donde y_1, \dots, y_n son soluciones l.i. de (H), y_p es solución particular cualquier de (S) y las $C_i \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias que dependerán de las n condiciones iniciales. (Las C_i no son los β_i calculados con anterioridad).

2.2.4. Wronskiano de dimension n

Definición 2.2.5. *Dadas las funciones $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$, el Wronskiano asociado a esas funciones se define como*

$$W(x, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Notar que $W(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{C}^1(I)$

Lema 2.2.1.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|A(x)| &= \sum_{i=1}^n \left| \begin{array}{c} \vdots \\ i\text{-ésima fila derivada} \\ \vdots \end{array} \right| \\ &= \sum_{j=1}^n \left| \dots \quad j\text{-ésima columna derivada} \quad \dots \right| \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(x, y_1, \dots, y_n) &= \left| \begin{array}{ccc} y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{array} \right| \\ &+ \dots \\ &+ \left| \begin{array}{ccc} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ y_1'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{array} \right| \end{aligned}$$

Si un determinante tiene 2 filas o 2 columnas iguales, su valor es 0, por lo tanto:

$$\begin{aligned} W' &= \left| \begin{array}{ccc} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{ccc} & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ & y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ (-\bar{a}_0(x)y_1 - \bar{a}_1(x)y_1' - \dots - \bar{a}_{n-1}y_1^{(n-1)}) & \dots & (-\bar{a}_0(x)y_n - \bar{a}_1(x)y_n' - \dots - \bar{a}_{n-1}y_n^{(n-1)}) \end{array} \right| \end{aligned}$$

Lema 2.2.2. *El determinante es multilineal por filas y columnas.*

Por ejemplo, si $\det(A) = \det(F_1, F_2, \dots, F_n)$, con F_i la fila i -ésima de A , se tendría que $\det(F_1, \dots, a + \lambda b, \dots, F_n) = \det(F_1, \dots, a, \dots, F_n) + \lambda \det(F_1, \dots, b, \dots, F_n)$.

Con este lema, la derivada del Wronskiano queda de la forma:

$$\begin{aligned}
 W' &= -\bar{a}_0(x) \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}_{=0} - \bar{a}_1(x) \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \end{vmatrix}}_{=0} - \dots \\
 &\quad - \bar{a}_{n-1}(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \\
 &= -\bar{a}_{n-1}(x)W
 \end{aligned}$$

Teorema 2.2.6 (Fórmula de Abel). Si $W(x, y_1, \dots, y_n)$ esta formado por y_1, \dots, y_n soluciones de (H), entonces

$$W(x, y_1, \dots, y_n) = C \exp\left(-\int \bar{a}_{n-1}(x) dx\right)$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Corolario 2.2.3. El Wronskiano formado por n soluciones de (H) o bien se anula siempre o bien nunca (mayor o menor a cero).

Teorema 2.2.7. Sean $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$. Se tiene que:

1. Si $W(x_0, y_1, \dots, y_n) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$ entonces y_1, \dots, y_n son l.i. en $\mathcal{C}^n(I)$.
2. Si $W(x, y_1, \dots, y_n) = 0$ para todo $x \in I$, no implica que y_1, \dots, y_n sean l.d. en $\mathcal{C}^n(I)$.
3. Si y_1, \dots, y_n son soluciones de (H), las siguientes proposiciones son equivalentes:
 - a) $W(x_0, y_1, \dots, y_n) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$.
 - b) $W(x, y_1, \dots, y_n) \neq 0$ para todo $x \in I$.
 - c) y_1, \dots, y_n son l.i.

Demostración. 1. Propuesto.

2. Un contraejemplo es $y_1 = x^3$ e $y_2 = |y^3|$.

3. La equivalencia entre a) y b) es evidente gracias a la fórmula de Abel.

La primera implicación de la equivalencia entre b) y c) es clara gracias a la proposición 1). Para la otra implicación, probemos que si $W(x_0, y_1, \dots, y_n) = 0$ para algún $x_0 \in I$, entonces y_1, \dots, y_n son l.i.

Como $W(x_0, y_1, \dots, y_n) = 0$ para algún $x_0 \in I$, se tiene que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definiendo $z(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} z(x_0) &= \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ z'(x_0) &= \alpha_1 y_1'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(x_0) &= \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Como $z \in \mathcal{H}$, por el teorema de existencia y unicidad, se tiene que $z(x) = 0$ para todo $x \in I$, luego existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ para todo $x \in I$.

□

2.2.5. Coeficientes Variables

■ Soluciones Homogéneas:

Deben ser n soluciones l.i. . No hay un método general para encontrarlas. Lo único que podemos decir es que conociendo $n - 1$ de ellas l.i. , se puede calcular una más l.i. usando la fórmula de Abel (si $n = 2$ fórmula de Liouville).

■ Soluciones Particulares:

Si conocemos a priori y_1, \dots, y_n n soluciones l.i. de (H) , $y_p = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i$ (variación de parámetros). Para simplificar definimos el operador lineal:

$$Ly = y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_0(x)y$$

Con esta notación se tiene

$$\begin{aligned} Ly_i &= 0 \text{ (H)} \\ Ly_p &= \bar{Q} \text{ (S)} \end{aligned}$$

Si imponemos $\sum_{i=1}^n C'_i(x)y_i = \sum_{i=1}^n C'_i(x)y'_i = \dots = \sum_{i=1}^n C'_i(x)y_i^{(n-2)} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 y_p &= \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i \\
 y'_p &= \sum_{i=1}^n C_i(x)y'_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n C'_i(x)y_i}_{=0} \\
 y''_p &= \sum_{i=1}^n C_i(x)y''_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n C'_i(x)y'_i}_{=0} \\
 &\vdots \\
 y_p^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i^{(n-1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n C'_i(x)y_i^{(n-2)}}_{=0} \\
 y_p^{(n)} &= \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n C'_i(x)y_i^{(n-1)}
 \end{aligned}$$

Ponderando la ecuación correspondiente a la i -ésima derivada de y_p por $\bar{a}_i(x)$ para $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y sumando hacia abajo, se tiene que

$$Ly_p = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i(x)Ly_i}_{=0(Ly_i=0)} + \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} = \bar{Q}$$

Matricialmente el sistema obtenido es:

$$\begin{pmatrix}
 y_1(x) & \dots & y_n(x) \\
 y'_1(x) & \dots & y'_n(x) \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\
 y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 C'_1 \\
 C'_2 \\
 \vdots \\
 C'_{n-1} \\
 C'_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \bar{Q}
 \end{pmatrix}$$

De la regla de Cramer, se sabe que $C'_i(x) = \frac{W_i(x, y_1, \dots, y_n)}{W(x, y_1, \dots, y_n)}$, donde W_i corresponde a W con la i -ésima columna cambiada por $(0, \dots, 0, \bar{Q})^t$, por lo tanto

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(s, y_1, \dots, y_n)}{W(s, y_1, \dots, y_n)} ds$$

Los $C_i(x)$ son únicos pues como y_1, \dots, y_n son l.i., $W(x, y_1, \dots, y_n) \neq 0$.

Formula de Green

$$\begin{aligned}
 y_p &= \sum_{i=1}^n y_i(x) C_i(x) \\
 &= \sum_{i=1}^n y_i(x) \int \frac{W_i(s, y_1, \dots, y_n)}{W(s, y_1, \dots, y_n)} ds \\
 &= \int \frac{1}{W(s, y_1, \dots, y_n)} \sum_{i=1}^n y_i(x) W_i(s, y_1, \dots, y_n) ds
 \end{aligned}$$

Podemos escribir $W_i(s, y_1, \dots, y_n) = (-1)^{n+i} \bar{Q}(s) \tilde{W}_i(s, y_1, \dots, y_n)$, donde $\tilde{W}_i(s, y_1, \dots, y_n)$ es igual a $W(s, y_1, \dots, y_n)$ sin la n -ésima fila y sin la i -ésima columna, es decir,

$$\tilde{W}_i(s, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(s) & \dots & y_{i-1}(s) & y_{i+1}(s) & \dots & y_n(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(s) & y_{i+1}^{(n-2)}(s) & \dots & y_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix}$$

Con esto queda

$$\begin{aligned}
 y_p &= \int \frac{\bar{Q}(s)}{W(s, y_1, \dots, y_n)} \sum_{i=1}^n y_i(x) (-1)^{n+i} \tilde{W}_i(s, y_1, \dots, y_n) ds \\
 &= \int \frac{\bar{Q}(s)}{W(s, y_1, \dots, y_n)} \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(s) & \dots & y_n(s) \\ y_1'(s) & \dots & y_n'(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \dots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}_{=R(x,s)}
 \end{aligned}$$

Definiendo la Función de Green como $G(x, s) = \frac{R(x, s)}{W(s, y_1, \dots, y_n)}$, se tiene que

$$y_p = \int G(x, s) \bar{Q}(s) ds$$

2.2.6. Coeficientes Constantes

Solución Homogénea

La EDO $y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \bar{a}_0y = 0$ se escribiera de la forma $P(D)y = 0$, donde $P(D)$ es el operador diferencial $P(D) = D^n + \bar{a}_{n-1}D^{n-1} + \dots + \bar{a}_1D + \bar{a}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i D^i$, con $\bar{a}_n = 1$.

$P(D)$ esta asociado al polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Como se trata de un polinomio de grado n , tendrá n raíces o valores característicos: $p(\lambda_i) = 0, \lambda_i \in \mathbb{C}$ raíces. Como $\bar{a}_i \in \mathbb{R}$, si hay raíces complejas, estas aparecerán en pares conjugados. Supondremos que hay l raíces distintas con multiplicidades algebraicas m_i respectivamente. El polinomio se puede descomponer de la forma:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_l)^{m_l} \\ &= \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \end{aligned}$$

con $n = \sum_{i=1}^l m_i$.

Es fácil probar que la factorización de $p(\lambda)$ induce una análoga en $P(D)$, donde el producto corresponde a una composición:

$$P(D) = \underbrace{(D - \lambda_1) \circ \dots \circ (D - \lambda_1)}_{m_1 \text{ veces}} \circ \underbrace{(D - \lambda_2) \circ \dots \circ (D - \lambda_2)}_{m_2 \text{ veces}} \circ \dots \circ \underbrace{(D - \lambda_l) \circ \dots \circ (D - \lambda_l)}_{m_l \text{ veces}}$$

Lo primero que se aprecia es que

$$P(D)y = 0 \Leftrightarrow (D - \lambda_1)^{m_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_l)^{m_l}y = 0$$

Se pueden definir nuevas variables z_i de la forma:

$$(D - \lambda_1) \circ (D - \lambda_1) \circ \dots \circ (D - \lambda_l) \circ \underbrace{(D - \lambda_l)y}_{z_{n-1}} = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{}_{z_{n-2}}}_{z_{n-1}}}_{z_1} = 0$$

Lo que genera un sistema en cascada de n EDO's lineales de orden 1:

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)z_1 &= 0 \\ (D - \lambda_1)z_2 &= z_1 \\ &\vdots \\ (D - \lambda_1)z_{m_1} &= z_{m_1-1} \\ &\vdots \\ (D - \lambda_l)y &= z_{n-1} \end{aligned}$$

En principio es un método válido para resolver la EDO (incluso la no-homogénea) pero es solo útil como concepto.

Propiedades 2.2.1. (*Traslación*)

1. $P(D + \lambda)1 = p(\lambda)$
2. $P(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}P(D + \lambda) = e^{\lambda x}p(\lambda)$
3. $P(D)(f(x)e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}P(D + \lambda)f(x)$

Demostración. 1. Recordemos que $(D + \lambda)^k f(x) = \underbrace{(D + \lambda) \dots (D + \lambda)}_{k \text{ veces}} f(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)}(x) \lambda^{k-i}$,

luego, si $f(x) = 1$, para todo $i > 0$, $f^{(i)}(x) = 0$, con lo que se obtiene $(D + \lambda)^k 1 = \lambda^k$, por lo tanto $P(D + \lambda)1 = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \lambda^i = p(\lambda)$.

2. De 1) y 3) con $f(x) = 1$ se tiene el resultado.

3. Se sabe que $D^j(f(x)e^{\lambda x}) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} D^k(f(x))D^{j-k}(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} D^k(f(x))\lambda^{j-k} = e^{\lambda x}(D + \lambda)^j f(x)$.

Ahora, $P(D)(f(x)e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^n \bar{a}_j D^j(f(x)e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^n [\bar{a}_j e^{\lambda x}(D + \lambda)^j f(x)] = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^n \bar{a}_j (D + \lambda)^j f(x) = e^{\lambda x} P(D + \lambda)f(x)$.

□

Con ayuda de la propiedad 2) se pueden encontrar l soluciones de la ecuación homogénea. Si λ_i es una raíz del polinomio $p(\lambda)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(D)e^{\lambda_i x} &= e^{\lambda_i x} \underbrace{p(\lambda_i)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_l x}$ son soluciones de (H). Veamos que son l.i.:

$$\begin{aligned} W(x, e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_l x}) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_l x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_l e^{\lambda_l x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_l^{l-1} e^{\lambda_l x} \end{vmatrix} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i x\right) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} & \dots & \lambda_l^{l-1} \end{vmatrix} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i x\right) C \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned}$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, el Wronskiano es distinto de cero y las funciones son l.i.

Para formar la base necesitamos n funciones l.i., por lo tanto hay que encontrar $n - l$ mas. De la propiedad 3), se tiene que (λ_i una raíz del polinomio $p(\lambda)$):

$$\begin{aligned} P(D)(x^k e^{\lambda_i x}) &= e^{\lambda_i x} P(D + \lambda_i) x^k \\ &= (D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_i - \lambda_i)^{m_i} \dots (D - \lambda_l - \lambda_i)^{m_l} x^k \\ &= (D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_{i-1} - \lambda_i)^{m_{i-1}} (D - \lambda_{i+1} - \lambda_i)^{m_{i+1}} \dots (D - \lambda_l - \lambda_i)^{m_l} D^{m_i} x^k \end{aligned}$$

Como $D^{m_i} x^k = 0 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq m_i - 1$, se encuentran $m_i - 1$ soluciones de (H):

$$x e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}$$

Repitiendo este procedimiento para cada m_i , se encuentran $n - l$ soluciones, ya que $\sum_{i=1}^l (m_i - 1) = \sum_{i=1}^l m_i - l = n - l$.

Ejemplo 2.2.1.

$$(D - 1)^2 (D + 3)^5 D^3 y = 0$$

En este caso $n = 10$. Veamos todas las soluciones que se encuentran con este metodo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, m_1 = 2 &\Rightarrow \{e^x, x e^x\} \\ \lambda_2 = -3, m_2 = 5 &\Rightarrow \{e^{-3x}, x e^{-3x}, x^2 e^{-3x}, x^3 e^{-3x}, x^4 e^{-3x}\} \\ \lambda_3 = 0, m_3 = 3 &\Rightarrow \{1, x, x^2\} \end{aligned}$$

Veamos si son l.i. Para todo $x \in I$ se debe cumplir:

$$\begin{aligned} &\alpha_{1,1} e^x + \alpha_{1,2} x e^x + \\ &\alpha_{2,1} e^{-3x} + \alpha_{2,2} x e^{-3x} + \alpha_{2,3} x^2 e^{-3x} + \alpha_{2,4} x^3 e^{-3x} + \alpha_{2,5} x^4 e^{-3x} + \\ &\alpha_{3,1} + \alpha_{3,2} x + \alpha_{3,3} x^2 = 0 \end{aligned}$$

Aplicando $(D - 1)^3 (D + 3)^5 D^2$ a esta expresion, se transforma en

$$2\alpha_{3,3} = 0$$

Aplicndo $(D - 1)^3 (D + 3)^5 D$, se obtiene

$$\alpha_{3,2} = 0$$

Y sucesivamente, se obtiene que $\alpha_{i,j} = 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, por lo tanto, son l.i.

En general, las n soluciones encontradas son l.i., pues dada la ecuación

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,1}e^{\lambda_1 x} + \dots + \alpha_{1,m_1}x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} + \\ & \alpha_{2,1}e^{\lambda_2 x} + \dots + \alpha_{2,m_2}x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x} + \\ & \quad \vdots \\ & \alpha_{l,1}e^{\lambda_l x} + \dots + \alpha_{l,m_l}x^{m_l-1}e^{\lambda_l x} = 0 \end{aligned}$$

Al aplicar el operador $(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_i)^{m_i-1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l}$, se obtiene

$$\begin{aligned} & \alpha_{i,m_i-1}(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l}(D - \lambda_i)^{m_i-1}(x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}) = 0 \\ & e^{\lambda_i x} \alpha_{i,m_i-1} \underbrace{(D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_l + \lambda_i)^{m_l}}_{\tilde{p}(\lambda_i)} \underbrace{D^{m_i-1}x^{m_i-1}}_{(m_i-1)!} = 0 \\ & e^{\lambda_i x} \alpha_{i,m_i-1} (m_i - 1)! \tilde{p}(\lambda_i) = 0 \end{aligned}$$

Se verifica que $\tilde{p}(\lambda_i) \neq 0$ y $(m_i - 1)! \neq 0$, por lo tanto $\alpha_{i,m_i-1} = 0$. Repitiendo la aplicación progresivamente, se verifica que todos los α_{i,m_i-1} son iguales a cero, con lo cual las n funciones son l.i..

Ejemplo 2.2.2.

$$(D - (1 + i))^3 (D - (1 - i))^3 y = 0$$

$n = 6$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 + i, m_1 = 3 & \Rightarrow \{e^{(1+i)x}, xe^{(1+i)x}, x^2e^{(1+i)x}\} \\ \lambda_2 = -3, m_2 = 5 & \Rightarrow \{e^{(1-i)x}, xe^{(1-i)x}, x^2e^{(1-i)x}\} \end{aligned}$$

Si $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ es una base, entonces $\{b_1 - b_2, b_1 + b_2, b_3, \dots, b_n\}$ también es una base, luego, sumando y restando cada par de soluciones correspondientes (es decir, $e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} = e^x \cos x$ y $e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x} = ie^x \sin x$), se obtiene una base real de la forma

$$\{e^x \cos x, xe^x \cos x, x^2e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \sin x, x^2e^x \sin x\}$$

Este último ejemplo permite generalizar la noción de la base obtenida. El siguiente teorema engloba lo estudiado en esta parte:

Teorema 2.2.8. *La ecuación homogénea*

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l} y = 0$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ soluciones de $p(\lambda) = 0$ (valores característicos), tiene por soluciones combinaciones lineales de la base

$$\{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}\}$$

para cada $\lambda_i \in \mathbb{R}$, unida con

$$\{e^{\sigma_j x} \cos w_j x, \dots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x} \cos w_j x\} \cup \{e^{\sigma_j x} \sin w_j x, \dots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x} \sin w_j x\}$$

para cada $\lambda_j = \sigma_j \pm iw_j$ (complejos conjugados).

Solución Particular

Si se tiene la EDO

$$P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x}$$

con $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ y $q_{k_0}e^{\lambda_0 x}$ una función que puede ser un polinomio por una exponencial, un polinomio por seno o coseno por una exponencial o cualquier combinación lineal de estos, donde $gr(q_{k_0}) \leq k_0$ en caso de ser un polinomio. Estas formas especiales se deben a los tipos de forzamientos que aparecen en la naturaleza.

El operador diferencial que anula el lado derecho es $(D - \lambda_0)^{k_0+1}$, pues

$$\begin{aligned} (D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)y &= (D - \lambda_0)^{k_0+1}q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \\ &= e^{\lambda_0 x}D^{k_0+1}q_{k_0}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, la ecuación se transforma una homogénea de orden $n + k_0 + 1$ que sabemos resolver.

Si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, se aplica además el operador $(D - \overline{\lambda_0})^{k_0+1}$ a ambos lados de la ecuación, con lo que se obtiene $(D - \overline{\lambda_0})^{k_0+1}(D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)y = 0$, que es una homogénea de orden $n + 2(k_0 + 1)$. Hay 2 casos que se estudiarán:

1. $\lambda_0 \neq \lambda_j$ para todo $j \in \{1, \dots, l\}$ (**caso no resonante**):

a) $\lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} &\Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} = 0 &\Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{aligned}$$

La idea es obtener y_p comparando \tilde{y}_h e y_h , más precisamente, como combinación lineal de aquellas funciones que aparezcan en \tilde{y}_h y que sean l.i. con las que aparezcan en y_h . Se sabe que y_h es combinación lineal de funciones pertenecientes a

$$\begin{aligned} M = \bigcup_{\lambda_i \in \mathbb{R}} \{e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}\} \cup \\ \bigcup_{\lambda_j = \sigma_j \pm i w_j} \{e^{\sigma_j x} \cos w_j x, \dots, x^{m_j-1} e^{\sigma_j x} \cos w_j x\} \cup \\ \{e^{\sigma_j x} \sin w_j x, \dots, x^{m_j-1} e^{\sigma_j x} \sin w_j x\} \end{aligned}$$

El \tilde{y}_h es combinación lineal de elementos pertenecientes a

$$\tilde{M} = M \cup \{e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k_0} e^{\lambda_0 x}\}$$

Luego, $y_p = (A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0x}$, con A_i constantes en \mathbb{R} a determinar.
Reemplazando y_p en $P(D)y$:

$$\begin{aligned} P(D)(A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0x} &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0x} \\ e^{\lambda_0x}P(D + \lambda_0)(A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0}) &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0x} \\ r_{k_0}(x) &= q_{k_0}(x) \end{aligned}$$

donde $r_{k_0}(x)$ es un polinomio cuyos coeficientes dependen de A_i para $i \in \{0, \dots, k_0\}$. Igualando coeficientes se obtiene un sistema lineal de $(k_0 + 1) \times (k_0 + 1)$, de donde se deducen los coeficientes.

Ejemplo 2.2.3.

$$(D - 1)(D - 2)y = xe^{3x}$$

Se sabe que $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$, para $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Con esto, se deduce que $y_p = (A_0 + xA_1)e^{3x}$, $y'_p = A_1e^{3x} + 3(A_0 + A_1x)e^{3x} = (A_1 + 3A_0 + 3A_1x)e^{3x}$ y $y''_p = (6A_1 + 9A_0 + 6A_1x)e^{3x}$. Con esto, la EDO evaluada en y_p es de la forma:

$$\begin{aligned} (D^2 - 3D + 2)y_p &= xe^{3x} \\ y''_p - 3y'_p + 2y_p &= xe^{3x} \\ (6A_1 + 9A_0 + 9A_1x - 3A_1 - 9A_0 - 9A_1x + 2A_0 + 2A_1x)e^{3x} &= xe^{3x} \\ 3A_1 + 2A_0 + 2A_1x &= x \end{aligned}$$

Lo que implica que $A_0 = \frac{-3}{4}$ y $A_1 = \frac{1}{2}$ y por lo tanto $y_p = (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x)e^{3x}$.

b) $\lambda_0 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0x} &\Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D - \bar{\lambda}_0)^{k_0+1}(D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} = 0 &\Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{aligned}$$

Comparando y_h con \tilde{y}_h , se tiene que

$$y_p = (A_0 + A_1x + \dots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma x} \cos w_0x + (B_0 + B_1x + \dots + B_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma x} \sen w_0x$$

Al reemplazar y_p en la EDO se obtienen $2k_0 + 2$ ecuaciones.

Ejemplo 2.2.4.

$$(D - 1)(D - 2)y = xe^{3x} \cos x$$

En este caso $\lambda_0 = 3 \pm i$, y la solución homogénea es $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$, luego

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0 + A_1x)e^{3x} \cos x + (B_0 + B_1x)e^{3x} \sen x \\ y'_p &= (\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1x)e^{3x} \cos x + (\tilde{B}_0 + \tilde{B}_1x)e^{3x} \sen x \text{ (verificar)} \\ y''_p &= (\tilde{\tilde{A}}_0 + \tilde{\tilde{A}}_1x)e^{3x} \cos x + (\tilde{\tilde{B}}_0 + \tilde{\tilde{B}}_1x)e^{3x} \sen x \text{ (verificar)} \end{aligned}$$

donde $\tilde{A}_0, \tilde{B}_0, \tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{\tilde{A}}_0, \tilde{\tilde{B}}_0, \tilde{\tilde{A}}_1, \tilde{\tilde{B}}_1$ estan en funcion de A_0, B_0, A_1, B_1 .
Reemplazando y_p en la EDO, se tiene que

$$(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x)e^{3x} \cos x + (\tilde{B}_0 + \tilde{B}_1 x)e^{3x} \operatorname{sen} x = xe^{3x} \cos x$$

De donde se deduce que $\tilde{A}_0 = 0, \tilde{A}_1 = 1, \tilde{B}_0 = 0$ y $\tilde{B}_1 = 0$, lo que permite encontrar A_0, B_0, A_1 y B_1 .

2. $\lambda_0 = \lambda_j$ para algun $j \in \{1, \dots, l\}$ (**caso resonante**):

a) $\lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} &\Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D - \lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} = 0 &\Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{aligned}$$

La segunda ecuacion se puede escribir de la forma

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_0)^{m_0+k_0+1} \dots (D - \lambda_l)^{m_l} \tilde{y} = 0$$

Es decir, λ_0 aumento su multiplicidad, luego, comparando \tilde{y}_h e y_h , se tiene que y_p es combinacion lineal de elementos de $\{x^{m_0}e^{\lambda_0 x}, x^{m_0+1}e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{m_0+k_0}e^{\lambda_0 x}\}$, es decir,

$$y_p = x^{m_0}(A_0 + A_1 x + \dots + A_{k_0} x^{k_0})e^{\lambda_0 x}$$

Al factor x^{m_0} se le llama factor de resonancia.

b) $\lambda_0 \in \mathbb{C}$:

Repitiendo el proceso, se observa que y_p es de la forma

$$y_p = x^{m_0}(A_0 + A_1 x + \dots + A_{k_0} x^{k_0})e^{\sigma_0 x} \cos w_0 x + x^{m_0}(B_0 + B_1 x + \dots + B_{k_0} x^{k_0})e^{\sigma_0 x} \operatorname{sen} w_0 x$$

Capítulo 3

Transformada de Laplace

3.1. Introducción

Definición 3.1.1. Dada $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se llama transformada de Laplace de f a la función

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.1)$$

que asocia a $s \in \mathbb{R}$ el valor $\mathcal{L}[f](s)$ cuando la integral converge. Si la transformada de Laplace de una función existe para $s > c$, a la mínima cota "c" se le llama asíntota de la transformada.

Veamos algunos ejemplos para funciones conocidas:

Ejemplo 3.1.1. $f(t) = 1$, $\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} 1 dt$. Veamos para que valores de s la transformada existe:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \begin{cases} \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} & s \neq 0 \\ t \Big|_0^{+\infty} & s = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s} & s > 0 \\ +\infty & s = 0 \\ -\infty & s < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ existe si $s > 0$ (la asíntota de convergencia es $c = 0$).

Ejemplo 3.1.2. $f(t) = e^{at}$ con $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \begin{cases} t & s = a \\ \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{+\infty} & s \neq a \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s-a} & s > a \\ +\infty & s = a \\ -\infty & s < a \end{cases} \end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$ existe si $s > a$ (la asíntota de convergencia es $c = a$).

Ejemplo 3.1.3. $f(t) = \cos wt$, $\mathcal{L}[\cos wt](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos wtdt$ (recordemos que $\cos wt + i \operatorname{sen} wt = e^{iwt}$ y que $\Re(e^{iwt}) = \cos wt$, $\Im(e^{iwt}) = \operatorname{sen} wt$ son la parte real e imaginaria de e^{iwt} respectivamente) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos wt](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos wtdt \\ &= \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{(-s+iw)t} dt \right) \\ &= \Re \left(\frac{1}{-s+iw} e^{(-s+iw)t} \Big|_0^{+\infty} \right) \\ &= e^{-st} \Re \left(\frac{\cos wt + i \operatorname{sen} wt}{-s+iw} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= e^{-st} \Re \left(\frac{(\cos wt + i \operatorname{sen} wt)(-s-iw)}{s^2+w^2} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s^2+w^2} e^{-st} (-s \cos wt + w \operatorname{sen} wt) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{s}{s^2+w^2}, \forall s > 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathcal{L}[\cos wt](s) = \frac{s}{s^2+w^2}$ existe si $s > 0$.

Propiedad 3.1.1. \mathcal{L} es lineal, es decir, $\forall f, g$ funciones de $[0, +\infty)$ en \mathbb{R} tales que $\mathcal{L}[f](s)$ y $\mathcal{L}[g](s)$ existen y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que:

- $\mathcal{L}[f + g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s)$.
- $\mathcal{L}[\lambda f](s) = \lambda \mathcal{L}[f](s)$.

Demostración. Como \int es un operador lineal para las funciones integrables, se tiene la linealidad de \mathcal{L} . □

Ejemplo 3.1.4. $f(t) = \cosh(t)$. Como $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh(t)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cosh(t)](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right](s) \\
 &= \mathcal{L}\left[\frac{e^t}{2}\right](s) + \mathcal{L}\left[\frac{e^{-t}}{2}\right](s) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}[e^t](s) + \mathcal{L}[e^{-t}](s)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{s^2 - 1} \right) \\
 &= \frac{s}{s^2 - 1}
 \end{aligned}$$

como $\mathcal{L}[e^t](s)$ existe para $s > 1$ y $\mathcal{L}[e^{-t}](s)$ existe para $s > -1$, se tiene que $\mathcal{L}[\cosh(t)](s)$ existe para $s > 1$ (asíntota de convergencia $c = 1$).

3.2. El espacio \mathcal{C}_α

Definición 3.2.1. Una función f tiene una discontinuidad de salto en $a \in \text{Dom}(f)$ si los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existen (distintos de $-\infty$ o ∞) y son distintos.

Definición 3.2.2. Una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice continua por pedazos si tiene un número finito o numerable de discontinuidades de salto en $[0, +\infty)$, pero sobre cada subintervalo acotado de $[0, +\infty)$ tiene a lo más un número finito de discontinuidades de salto.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.2.1. La función $f(t) = (-1)^{[t]}$ o $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \wedge t < 1 \\ -1 & 1 \leq t \wedge t < 2 \end{cases}$ con período 2, llamada onda cuadrada es continua por pedazos.

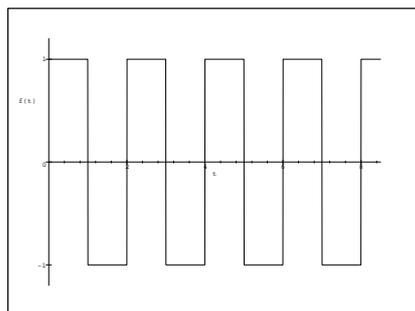


Figura 3.1: Gráfico de la onda cuadrada.

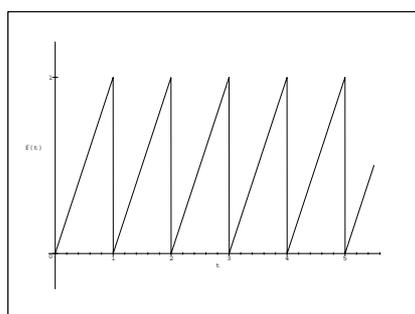


Figura 3.2: Gráfico de la onda de dientes de sierra.

Ejemplo 3.2.2. La función $f(t) = t - [t]$ o $f(t) = t, 0 \leq t < 1$ con período 1, llamada onda de dientes de sierra es continua por pedazos.

Ejemplo 3.2.3. La función $f(t) = \tan(t)$ no es continua por pedazos pues $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = -\infty$ y

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = +\infty.$$

Ejemplo 3.2.4. La función $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ no es continua por pedazos pues $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ y

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} = -\infty.$$

Definición 3.2.3. Una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es de orden exponencial si $\exists \alpha, C \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$. Al valor $\min\{\alpha : \exists C \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq Ce^{\alpha t}\}$ se le llama orden exponencial de f .

Definición 3.2.4. El espacio \mathcal{C}_α se define como

$$\mathcal{C}_\alpha = \{f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua por pedazos en } [0, +\infty) \text{ y de orden exponencial } \alpha\}.$$

Gráficamente, el hecho de tener orden exponencial significa que la función no puede crecer más rápido que $Ce^{\alpha t}$. En el siguiente gráfico, cualquier función que tenga su recorrido en la zona entre ambas curvas es de orden exponencial.

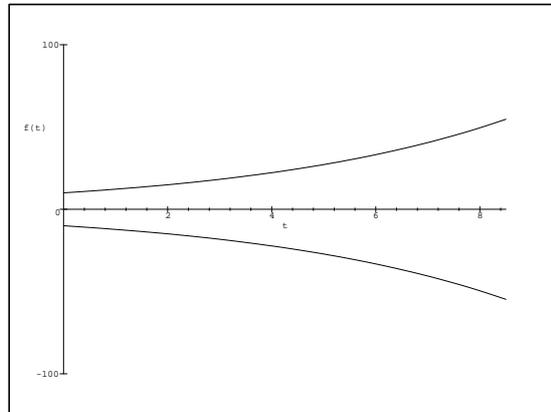


Figura 3.3: Región donde las funciones son de orden exponencial con $C = 100$ y $\alpha = \frac{1}{5}$.

Propiedad 3.2.1. \mathcal{C}_α es un subespacio vectorial de $\{f \mid f \text{ es función de } [0, +\infty) \text{ en } \mathbb{R}\}$

Demostración. La demostración es fácil y queda propuesta al lector. □

Propiedad 3.2.2. Si $f' \in \mathcal{C}_\alpha$ entonces $f \in \mathcal{C}_\alpha$.

Demostración. Propuesta. □

Propiedad 3.2.3. Si $f \in \mathcal{C}_\alpha$ entonces para todo $s > \alpha$, existe $\mathcal{L}[f](s)$ (y converge absolutamente) y además

$$|\mathcal{L}[f(t)](s)| \leq \frac{C}{s - \alpha}, \forall s > \alpha$$

de modo que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f(t)](s) = 0$.

Demostración. Recordemos que si la integral converge absolutamente, entonces converge. Con esto

se tiene que:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}[f(t)](s)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \\
 &\leq \int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \\
 &\leq C \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt \\
 &\leq C \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt \\
 &\leq C \frac{1}{-s+\alpha} e^{(-s+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} \\
 &\leq \frac{C}{s-\alpha}
 \end{aligned}$$

□

Ejercicio Propuesto 3.2.1. Demostrar que $t^k, k \in \mathbb{N}$, tiene transformada de Laplace y que $\mathcal{L}[t^k](s) = \frac{k!}{s^{k+1}}, s > 0$.

3.3. Funciones especiales

3.3.1. Escalón de Heaviside

La función escalón de Heaviside se define como

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

Como $H_0(t)$ representa el escalón de Heaviside con $a = 0$, la representación de $H_a(t)$ con $a > 0$ es $H_0(t - a)$. La transformada de Laplace de H_a , con $a \geq 0$ es $\mathcal{L}[H_a(t)](s) = \frac{1}{s} e^{-as}$, para $s > 0$ (verificar) (para $a = 1$ se obtiene $\mathcal{L}[1](s)$).

3.3.2. Pulso entre a y b

Se define como $P_{ab}(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t < b \\ 0 & t \geq b \end{cases}$, con $a < b$. Notar que $P_{ab}(t) = H_a(t) - H_b(t)$. Luego, su

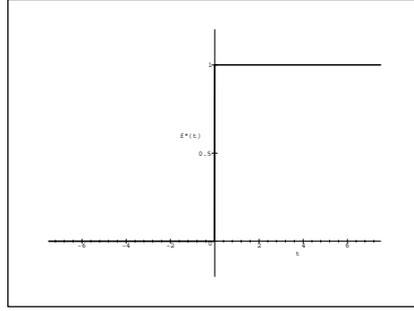


Figura 3.4: Escalón de Heaviside con $a = 0$.

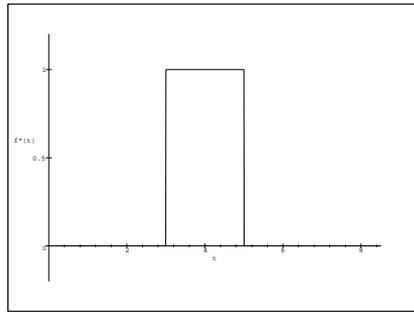


Figura 3.5: Pulso entre $a = 3$ y $b = 5$.

transformada de Laplace para $0 \leq a < b$ será $\mathcal{L}[P_{ab}(t)](s) = \mathcal{L}[H_a(t) - H_b(t)](s) = \mathcal{L}[H_a(t)](s) - \mathcal{L}[H_b(t)](s)$ (por linealidad del operador) por lo tanto $\mathcal{L}[P_{ab}(t)](s) = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$, para $s > 0$.

3.3.3. Delta de Dirac

Definición 3.3.1. Para $n \in \mathbb{N}$, se define la función $f_n(t) = nP_{0\frac{1}{n}}(t)$, con $nP_{0\frac{1}{n}}(t) = n(H_0(t) -$

$$H_{\frac{1}{n}}(t)), \text{ es decir, } f_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ n & 0 \leq t < \frac{1}{n} \\ 0 & t \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Las funciones f_n cumplen con las siguientes propiedades:

Propiedad 3.3.1. Sea f una función continua en 0.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$

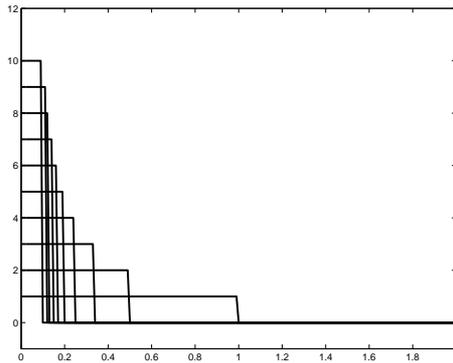


Figura 3.6: Distintas funciones f_n .

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)f(x)dx = f(0)$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-a} f_n(x)f(x)dx = 0, \text{ con } a > 0.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)f(x)dx = 0, \text{ con } a > 0.$$

Definición 3.3.2. La Delta de Dirac $\delta(t)$ se define como $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)f(x)dx$ para funciones f adecuadas (continuas) o " $\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ ". Los valores que toma son 0 en todo \mathbb{R} excepto en 0 donde se indefine, es decir $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$.

Observación: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.

Extendiendo la definición, se tiene que, dado $a \in \mathbb{R}$, $\delta(t - a) = \begin{cases} 0 & t \neq a \\ \infty & t = a \end{cases}$. De esta forma,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a)f(t)dt = f(a), \text{ donde } f \text{ es continua en } a.$$

En estricto rigor, el Delta de Dirac no es una función, pues no está definida cuando $t = 0$. Se dice que es una distribución.

Para entender la utilidad de $\delta(t)$, basta considerar el ejemplo de un martillazo o chispazo, es decir, que en un brevisimo período de tiempo, se le esta aplicando una fuerza muy grande a algún objeto, por esto es llamada también impulso unitario.

Si se tienen dos funciones f y g , con g derivable en \mathbb{R} , tales que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = 0$, la integración por partes de $f(x)g'(x)$ es una forma débil o variacional de identificar la "derivada" de

f , aún si f no es derivable. Denotando por f' a la "derivada" obtenida de esta forma (que coincide con la derivada usual si f es derivable), obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx$$

pero como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = 0$, se obtiene $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx$.

Si tomamos $f = H_a$, el escalón de Heaviside en a , se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_a(x)g'(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} H'_a(x)g(x)dx$$

pero $\int_{-\infty}^{\infty} H_a(x)g'(x)dx = \int_a^{\infty} g'(x)dx$, se tiene $\int_a^{\infty} g'(x)dx = 0 - g(a)$. Con esto, el valor de la integral de la "derivada" del escalón en a por una función g que cumple con la restricción de límite equivale a evaluar aquella función en el valor a , es decir

$\int_{-\infty}^{\infty} H'_a(x)g(x)dx = g(a)$ Como $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)g(x)dx = g(a)$ y $\int_{-\infty}^{\infty} H'_a(x)g(x)dx = g(a)$ se dice que $\delta(t)$ se comporta como la "derivada" del escalón de Heaviside centrado en a , es decir, $H'_a(t) = \delta(t - a)$. Cabe destacar que las funciones f_n no son las únicas que dan origen a δ , pues basta con que cumplan las propiedades enunciadas. Algunos ejemplos de familias de funciones que dan origen a δ y cumplen con las propiedades son:

- $f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2t^2}$.
- $f_n(t) = \frac{\text{sen}(2\pi nt)}{\pi t}$.
- $f_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2t^2 + 1}$.

3.4. Transformada de una derivada

Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$ derivable. Calculemos su transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt, s > \alpha \\ &= s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + e^{-st} f(t)\Big|_0^{\infty} \\ &= s\mathcal{L}[f(t)](s) + \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st} f(t) \end{aligned}$$

como f es de orden exponencial α , se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-st} f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-st} e^{\alpha t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-\alpha)t} = 0$, pues $s > \alpha$. Llamando $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st} f(t)$. Con esto se obtiene

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+), s > \alpha$$

Veamos ahora la transformada de Laplace de la segunda derivada de f :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)](s) &= s\mathcal{L}[f'(t)](s) - f'(0^+), s > \alpha \\ &= s(s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+)) - f'(0^+) \\ &= s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0^+) - f'(0^+) \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso, se obtiene la fórmula para la transformada de la n -ésima derivada de f :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+), s > \alpha$$

Ejemplo 3.4.1. Un cohete despega con velocidad inicial v_0 desde la Tierra en forma vertical. Luego de algunos segundos, se activan los motores de emergencia, por lo que adquiere una aceleración $a > 0$ durante un intervalo de tiempo breve. Si la gravedad de la Tierra es g , encuentre la ecuación de movimiento del cohete suponiendo que tiene masa m y $t_2 - t_1$ es el intervalo en el que funcionan los motores de emergencia, con $t_2 > t_1$.

De la sumatoria de fuerzas obtenemos

$$m \frac{d^2}{dy^2} y(t) = -mg + ma(P_{t_1 t_2}(t))$$

,donde $y(t)$ es la posición del cohete con respecto a la Tierra. Las condiciones iniciales del cohete son $y(0) = 0$ y $y'(0) = v_0$. Eliminando m a ambos lados y aplicando \mathcal{L} se obtiene la ecuación

$$\mathcal{L}[y''(t)](s) = a\mathcal{L}[P_{t_1 t_2}(t)](s) - g\mathcal{L}[1](s)$$

recordando las expresiones para $\mathcal{L}[y''(t)](s)$, $\mathcal{L}[P_{t_1 t_2}(t)](s)$ y $\mathcal{L}[1](s)$, la expresión queda

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) = \frac{a}{s}(e^{-t_1 t} - e^{-t_2 t}) - \frac{g}{s}$$

Los valores $y(0^+)$ y $y'(0^+)$ equivalen a las condiciones iniciales del problema, es decir, $y(0^+) = 0$ y $y'(0^+) = v_0$,

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{v_0}{s^2} + \frac{a}{s^3} e^{-t_1 t} - \frac{a}{s^3} e^{-t_2 t} - \frac{g}{s^3}$$

En este punto, se necesita comprender como opera un antitransformada, por lo cual, se continuara en el ejemplo (3.12.1).

3.5. Transformada de una integral

Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$ integrable. Sea $a \in \mathbb{R}$. Encontramos la transformada de la función $F(t) = \int_a^t f(u)du$ ($F'(t) = f(t)$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[F'(t)](s) &= \mathcal{L}[F(t)](s) - F(0^+), s > \alpha \\ &= s\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u)du\right](s) - \int_a^{0^+}\end{aligned}$$

por lo tanto, la transformada de $F(t)$ es

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u)du\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)du, s > \alpha$$

Sea $\int_a^t \int_a^t f(u)du$ la expresión que representa $\int_a^t \left(\int_a^u f(v)dv\right) du$. La transformada de esta expresión es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_a^t \int_a^t f(u)du\right](s) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u)du\right](s) - \frac{1}{s}\int_0^a \int_a^t f(u)du, s > \alpha \\ &= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)du\right) - \frac{1}{s}\int_0^a \int_a^t f(u)du \\ &= \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[f(t)](s) - \frac{1}{s^2}\int_0^a f(u)du - \frac{1}{s}\int_0^a \int_a^t f(u)du\end{aligned}$$

repetiendo el proceso, se obtiene la fórmula para la transformada de la n-ésima integral:

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t}_{n \text{ veces}} f(u)du\right](s) = \frac{1}{s^n}\mathcal{L}[f(t)](s) - \frac{1}{s^n}\int_0^a f(u)du - \dots - \frac{1}{s}\int_0^a \underbrace{\int_a^t \dots \int_a^t}_{n-1 \text{ veces}} f(u)du$$

3.6. Traslaciones

Una traslación en el dominio temporal t corresponde a un factor exponencial en el dominio de Laplace s , es decir, si $f \in \mathcal{C}_\alpha$, $a \in \mathbb{R}$ se tiene que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) &= \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)f(t-a)dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt \\ &\stackrel{\substack{= \\ u=t-a}}{=} \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du \\ &= e^{-sa}\mathcal{L}[f(t)](s) \end{aligned}$$

De manera análoga, una traslación en el dominio de Laplace corresponde a un factor exponencial en el dominio temporal:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}e^atf(t)dt \\ &= \mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) \end{aligned}$$

3.7. Igualdad de transformadas

Si $f = g$ con $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$, se tiene que $f - g = 0$, por lo tanto $\mathcal{L}[(f - g)(t)](s) = \mathcal{L}[0](s)$, como \mathcal{L} es un operador lineal, $\mathcal{L}[0](s) = 0$ y $\mathcal{L}[(f - g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) - \mathcal{L}[g(t)](s) = 0$, de lo que se deduce $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$. Son embargo, la proposición reciproca $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow f = g$ no implica $f = g$. Para determinar cuando se tiene la implicancia se tiene el siguiente teorema (sin demostración):

Teorema 3.7.1 (Lerch). *Si $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$ y $\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[g(t)](s), \forall s > \alpha$ entonces $f(t) = g(t), \forall t \geq 0$ salvo en la unión de las discontinuidades de f y g .*

3.8. Convergencia Uniforme de \mathcal{L}

Sean $\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ y $\Phi_n(s) = \int_0^n e^{-st} f(t) dt$, con $s \in I = [\alpha_0, M]$, $M > \alpha_0 > \alpha$, $f \in \mathcal{C}_\alpha$.
 Probemos que $\|\Phi - \Phi_n\|_\infty \rightarrow 0$. Sea $s \in I$:

$$\begin{aligned} |\Phi_n(s) - \Phi(s)| &= \left| \int_n^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_n^\infty \\ &\leq \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)n} \end{aligned}$$

por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(s) = \Phi(s)$, es decir, Φ_n converge puntualmente a Φ para todo $s \in I$.
 Veamos la convergencia uniforme:

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [\alpha_0, M]} |\Phi_n(s) - \Phi(s)| &\leq \sup_{s > \alpha} \frac{C}{s - \alpha} e^{-(s-\alpha)n} \\ &= \frac{C}{\alpha_0 - \alpha} e^{-(\alpha_0 - \alpha)n} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $\|\Phi - \Phi_n\|_\infty \rightarrow 0, \forall s \geq \alpha_0 > \alpha$.

3.9. Diferenciabilidad e integrabilidad de \mathcal{L}

3.9.1. Diferenciabilidad

Sea $f \in \mathcal{C}_\alpha$. El valor de la derivada con respecto a s de la transformada de Laplace de f se calcula de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &\stackrel{\text{conv. unif.}}{=} \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}[tf(t)](s) \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso, la derivada n-ésima de la tranf. de Laplace de f se expresa como

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(t)](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$$

3.9.2. Integrabilidad

Para el caso en que deseemos integrar la transf. de una función $f \in \mathcal{C}_\alpha$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u) du &= \int_0^s \left(\int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right) du \\
 &\stackrel{\text{conv. unif.}}{=} \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-ut} f(t) du \right) dt \\
 &= \int_0^\infty \left(\frac{-1}{t} e^{-ut} \Big|_0^s f(t) \right) dt \\
 &= - \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt \\
 &= -\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt
 \end{aligned}$$

si en la formula de la derivada de la transformada, se toma $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, se obtiene $\frac{d}{ds} \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = -\mathcal{L}[f(t)](s)$, por lo tanto $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) - \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) = - \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du$. Si $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}_\alpha$ se tiene $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) = 0$, por lo cual

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] (s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du$$

La única condición para que $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{C}_\alpha$ con $f(t) \in \mathcal{C}_\alpha$ es que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ exista ($\neq \pm\infty$). Entonces, la formula que se obtiene es

$$\int_0^s \mathcal{L}[f(t)](u) du = - \int_s^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du + \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$$

que equivale a integrar desde 0 a ∞ , es decir,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}[f(t)](u) du = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$$

3.10. Convolución

Definición 3.10.1 (Producto de Convolución). Sean f y g funciones en \mathcal{C}_α . El producto de convolución entre f y g se define como $(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds$

Propiedades 3.10.1. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $*$ es conmutativa en \mathcal{C}_α .
2. $*$ es asociativa en \mathcal{C}_α .
3. $*$ distribuye con respecto a $+$ en \mathcal{C}_α .

Demostración. Propuesta. □

Teorema 3.10.1. *Sean $f, g \in \mathcal{C}_\alpha$. Entonces*

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$$

,es decir, la convolución actúa como la multiplicación bajo transformadas de Laplace.

Demostración. Dadas f y g en \mathcal{C}_α , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(f * g)(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(u)g(t-u)du \right) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt \end{aligned}$$

como $0 < t < \infty$ y $0 < u < t$, podemos hacer un cambio en los límites de integración, ya que los conjuntos $\{(t, s) : 0 < t < \infty \wedge 0 < u < t\}$ y $\{(t, s) : u < t < \infty \wedge 0 < u < \infty\}$ son iguales, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt &= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u)g(t-u)dtdu \\ &\stackrel{w=t-u}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(w+u)} f(u)g(w)dwdu \\ &= \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \int_0^\infty e^{-sw} g(w)dw \\ &= \mathcal{L}[f(t)](s) \mathcal{L}[g(t)](s) \end{aligned}$$

□

Observación: Como consecuencia se obtiene que δ_0 es el neutro para $*$, es decir, para $f \in \mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{L}[f * \delta_0] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[\delta_0]$ y como $\mathcal{L}[\delta_0] = 1$, $\mathcal{L}[f * \delta_0] = \mathcal{L}[f]$. Por el teorema de Lerch, $f * \delta_0 = f \Leftrightarrow \delta_0 * f = f$ (no riguroso).

3.11. Fracciones Parciales

Supongamos se tiene la expresión racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios a coeficientes reales tales que sus grados cumplen con $gr(p) < gr(q)$. Si se quiere obtener expresiones más simples a partir de $\frac{p(x)}{q(x)}$, se puede descomponer esa expresión en fracciones parciales, las que al ser sumadas dan como resultado la expresión original. Los casos más frecuentes de descomposición son los siguientes:

1. Si $q(x)$ tiene n raíces reales distintas cada una de multiplicidad algebraica (m. a.) 1, es decir, $q(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$, con $a_i \in \mathbb{R}$ y $\forall i \neq j, a_i \neq a_j$:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

2. Si $q(x)$ tiene una raíz real de m. a. n , es decir, $q(x) = (x - a)^n$, con $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

3. Si $q(x)$ tiene $m + 1$ raíces reales distintas, m con m. a. 1 y una con m. a. n , es decir, $q(x) = (x - a)^n(x - b_1) \dots (x - b_m)$, con $a, b_i \in \mathbb{R}$ y $\forall i \neq j, b_i \neq b_j \wedge b_i \neq a$:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n} + \frac{B_1}{x - b_1} + \dots + \frac{B_m}{x - b_m}$$

4. Si $q(x)$ tiene 2 raíces complejas distintas de m. a. 1, es decir, $q(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ o bien $q(x) = (x - z)(x - \bar{z})$, con $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$, $\Im(z) \neq 0$ (parte imaginaria distinta de 0) soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

5. Si $q(x)$ tiene 2 raíces complejas distintas de m. a. n , es decir, $q(x) = (ax^2 + bx + c)^n$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ o bien $q(x) = (x - z)^n(x - \bar{z})^n$, con $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$, $\Im(z) \neq 0$ soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

6. Cualquier combinación de estos casos.

Una vez descompuesta la expresión original, se deben encontrar los valores de los coeficientes de la parte derecha. Existen varias formas de encontrarlos, veremos 2 métodos:

- Método 1: Multiplicar por $q(x)$ a ambos lados y evaluar raíz por raíz.
- Método 2: Desarrollar la suma de la parte derecha e igualar coeficientes.

Ejemplo 3.11.1. Se desea descomponer la expresión

$$\frac{1}{s^2((s-a)^2 + b^2)}$$

sabiendo que las soluciones de $(s-a)^2 + b^2 = 0$, z y su conjugado \bar{z} están en \mathbb{C} . Realizando la descomposición utilizando una combinación de (2) y (4), se tiene que

$$\frac{1}{s^2((s-a)^2 + b^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C + Ds}{(s-a)^2 + b^2} \tag{3.2}$$

Utilizando el método 1, es decir, multiplicando por $s^2((s-a)^2 + b^2)$ a ambos lados de (3.2), se obtiene

$$1 = As((s-a)^2 + b^2) + B((s-a)^2 + b^2) + (C + sD)s^2$$

Evalutando en z y \bar{z} , se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} 1 &= Cz^2 + z^3D \\ 1 &= C\bar{z}^2 + \bar{z}^3D \end{aligned}$$

multiplicando la primera igualdad por \bar{z}^2 y la segunda por z^2 , se tiene

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 &= Cz^2 \cdot \bar{z}^2 + z \cdot z^2 \cdot \bar{z}^2 D \\ z^2 &= C\bar{z}^2 \cdot z^2 + \bar{z} \cdot \bar{z}^2 \cdot z^2 D \end{aligned}$$

como $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, se deduce que

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 &= C|z|^4 + z \cdot |z|^4 D \\ z^2 &= C|z|^4 + \bar{z} \cdot |z|^4 D \end{aligned}$$

multiplicando por -1 la primera igualdad y sumando, se obtiene D

$$\begin{aligned} D &= \frac{(z - \bar{z})(z + \bar{z})}{-|z|^4(z - \bar{z})} \\ D &= \frac{-2\Re(z)}{|z|^4} \end{aligned}$$

recordando que $\Re(z) = z + \bar{z}$. El valor de C se obtiene reemplazando el D obtenido. Evaluando en 0, se obtiene

$$1 = B(a^2 + b^2)$$

con lo cual $B = \frac{1}{a^2 + b^2}$. La constante A no se obtiene reemplazando la incognita por alguna raíz, por lo tanto, se utiliza el método 2 para determinarla.

Ahora, si utilizamos el método 2, es decir, desarrollar el lado derecho de (3.2), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2((s-a)^2 + b^2)} &= \frac{As((s-a)^2 + b^2) + B((s-a)^2 + b^2) + (C + sD)s^2}{s^2((s-a)^2 + b^2)} \\ 1 &= A(s^3 - 2as^2 + (a^2 + b^2)s) + B(s^2 - 2as + a^2 + b^2) + Cs^2 + Ds^3 \\ 1 &= s^3(A + D) + s^2(-2aA + B + C) + s(A(a^2 + b^2) - 2aB) + (Ba^2 + Bb^2) \end{aligned}$$

de esta igualdad, se deduce 4 ecuaciones, igualando los coeficientes de cada lado:

$$\begin{aligned} 0 &= A + D \\ 0 &= -2aA + B + C \\ 0 &= A(a^2 + b^2) - 2aB \\ 1 &= Ba^2 + Bb^2 \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2a & 1 & 1 & 0 \\ (a^2 + b^2) & -2a & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + b^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de este sistema se obtienen los valores de A, B, C y D . □

3.12. Antitransformadas

Se tiene la siguiente EDO a coeficientes constantes:

$$P(D)y(t) = \bar{Q}(t)$$

con $P(D)$ un operador diferencial de orden n normalizado ($a_n = 1$) y $\overline{Q}(t)$ es combinación lineal de funciones en \mathcal{C}_α . Aplicando \mathcal{L} a ambos lados de la EDO, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\sum_{j=1}^n a_j D^j y(t) \right] (s) &= \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s) \\ \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{L} [D^j y(t)] (s) &= \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s) \end{aligned}$$

pero se sabe que $\mathcal{L} [D^j y(t)] (s) = s^j \mathcal{L}[y(t)](s) - s^{j-1}y(0^+) - \dots - y^{j-1}(0^+)$, lo cual es un polinomio de grado menor o igual a $j - 1$ en la variable s , cuyos coeficientes dependen de las condiciones iniciales. Con esto la ecuación queda ($R(s)$ tiene grado a lo más $n - 1$):

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n a_j s^j \right)}_{P(s)} \mathcal{L}[y(t)](s) - \underbrace{\sum_{j=1}^n a_j (s^{j-1}y(0^+) + \dots + y^{j-1}(0^+))}_{R(s)} &= \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s) \\ P(s)\mathcal{L}[y(t)](s) &= R(s) + \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s) \\ \mathcal{L}[y(t)](s) &= \frac{R(s)}{P(s)} + \frac{\mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)}{P(s)} \end{aligned}$$

Llamando $y_h(t)$ e $y_p(t)$ a la funciones tales que $\mathcal{L}[y_h(t)](s) = \frac{R(s)}{P(s)}$ y $\mathcal{L}[y_p(t)] = \frac{\mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)}{P(s)}$, se tiene que :

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \mathcal{L}[y_h(t)](s) + \mathcal{L}[y_p(t)](s)$$

Definición 3.12.1. Una función f (en el dominio temporal) es antitransformada de una función ρ (en el dominio de Laplace) si se cumple que $\mathcal{L}[f(t)] = \rho(s)$. Se denota como $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\rho(s)](t)$.

En el ejemplo inicial, se tendría que $y_h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R(s)}{P(s)} \right] (t)$ e $y_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s)}{P(s)} \right] (t)$.

Para encontrar $y_p(t)$, consideremos $H(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{P(s)} \right] (t)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{L}[H(t)](s) \mathcal{L}[\overline{Q}(t)](s) \right] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{L}[(H * \overline{Q})(t)](s) \right] (t) \\ &= (H * \overline{Q})(t) \\ &= \int_0^t H(t - \theta) \overline{Q}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Para encontrar $y_h(t)$ se utiliza la descomposición en fracciones parciales de la función racional $\frac{R(s)}{P(s)}$.

Se tendrá que $y_h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R(s)}{P(s)} \right]$, con $gr(P) = n$ y $gr(R) \leq n - 1$, considerando al polinomio $P(s)$ de la forma

$$P(s) = (s - \lambda_1)^{m_1} \dots (s - \lambda_l)^{m_l}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ raíces de P y m_1, \dots, m_l son las multiplicidades algebraicas respectivas. Si alguna raíz cumple con $\Im(\lambda) \neq 0$ (parte imaginaria distinta de cero), entonces ella y su conjugado son raíces del polinomio, y se tiene que $\lambda = \sigma + iw, \bar{\lambda} = \sigma - iw$ tales que $(s - \sigma - iw)(s - \sigma + iw) = (s - \sigma)^2 + w^2$. Con esto, podemos escribir la descomposición de P de la forma

$$P(s) = (s - \lambda_1)^{m_1} \dots (s - \lambda_k)^{m_k} ((s - \sigma_{k+1})^2 + w_{k+1})^{m_{k+1}} \dots ((s - \sigma_l)^2 + w_l)^{m_l}$$

donde las raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ cumplen con $\Im(\lambda) = 0$, y las raíces $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_l$ cumplen con $\Im(\lambda) \neq 0$. Por lo tanto, la expresión para $\frac{1}{P(s)}$, utilizando una descomposición en fracciones parciales, sería de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(s)} &= \frac{A_{1,1}}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{A_{m_1,1}}{(s - \lambda_1)^{m_1}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{A_{1,k}}{s - \lambda_k} + \dots + \frac{A_{m_k,k}}{(s - \lambda_k)^{m_k}} \\ &+ \frac{B_{1,k+1} + sC_{1,k+1}}{(s - \sigma_{k+1})^2 + w_{k+1}} + \dots + \frac{B_{m_{k+1},k+1} + sC_{m_{k+1},k+1}}{((s - \sigma_{k+1})^2 + w_{k+1})^{m_{k+1}}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{B_{1,l} + sC_{1,l}}{(s - \sigma_l)^2 + w_l} + \dots + \frac{B_{m_l,l} + sC_{m_l,l}}{((s - \sigma_l)^2 + w_l)^{m_l}} \end{aligned}$$

Considerando las siguientes transformadas de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[H(t)](s - \lambda) &= \frac{1}{s - \lambda} \\ \mathcal{L} \left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right] (s - \lambda) &= \frac{1}{(s - \lambda)^k} \\ \mathcal{L} \left[\frac{1}{w} \text{sen}(wt) \right] (s - \sigma) &= \frac{1}{(s - \sigma)^2 + w^2} \\ \mathcal{L} [\cos(wt)] (s - \sigma) + \mathcal{L} \left[\frac{\sigma}{w} \text{sen}(wt) \right] (s - \sigma) &= \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2} + \frac{\sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2} \end{aligned}$$

y recordando que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[H(t)](s - \lambda) &= \mathcal{L}[e^{\lambda t}H(t)](s) \\ \mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s - \lambda) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{\lambda t}t^{k-1}}{(k-1)!}\right](s) \\ \mathcal{L}\left[\frac{1}{w}\text{sen}(wt)\right](s - \sigma) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{\sigma t}}{w}\text{sen}(wt)\right](s) \\ \mathcal{L}[\cos(wt)](s - \sigma) + \mathcal{L}\left[\frac{\sigma}{w}\text{sen}(wt)\right](s - \sigma) &= \mathcal{L}\left[e^{\sigma t}\cos(wt) + \frac{e^{\sigma t}}{w}\text{sen}(wt)\right](s)\end{aligned}$$

se obtienen las antitrasformadas

$$\begin{aligned}e^{\lambda t}H(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - \lambda}\right](t) \\ e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - \lambda)^k}\right](t) \\ \frac{e^{\sigma t}}{w}\text{sen}(wt) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - \sigma)^2 + w^2}\right](t) \\ e^{\sigma t}\cos(wt) + \frac{\sigma e^{\sigma t}}{w}\text{sen}(wt) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s - \sigma)^2 + w^2}\right](t)\end{aligned}$$

Con estas 4 identidades, la expresión (3.3) queda practicamente de la forma $\frac{1}{P(s)} = \mathcal{L}[f(t)](s)$, con lo que se tendria el resultado, sin embargo, aún falta encontrar las antitrasformadas de los siguientes tipos:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right](t)$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right](t)$
3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 + a^2)^n}\right](t)$
4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^n}\right](t)$

Veamos cada caso:

1. Basta considerar $\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + a^2} = \frac{-2s}{(s^2 + a^2)^2}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right] (t) &= \frac{-1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + a^2} \right] \\ &= \frac{-1}{2a} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\text{sen}(at)] \right] \\ &= \frac{-1}{2a} t \text{sen}(at) \end{aligned}$$

2. Recordando que $\mathcal{L} \left[\int_0^t f \right] = \frac{-1}{s} \mathcal{L}[f]$, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^2} \right] (t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s} \mathcal{L} \left[\frac{1}{2a} t \text{sen}(at) \right] (s) \right] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{L} \left[\int_0^t \frac{1}{2a} t \text{sen}(at) \right] (s) \right] (t) \\ &= \int_0^t \frac{1}{2a} t \text{sen}(at) \\ &= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \text{sen}(at) - t \cos(at) \right) \end{aligned}$$

(verificar)

3. Por recurrencia se tiene que $\frac{d}{ds} \frac{1}{(s^2 + a^2)^{n-1}} = \frac{(n-1)(s^2 + a^2)^{n-2} 2s}{(s^2 + a^2)^{2n-2}} = \frac{-2s(n-1)}{(s^2 + a^2)^n}$, y la antitransformada sera de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + a^2)^n} \right] (t) &= \frac{-1}{2(n-1)} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(s^2 + a^2)^{n-1}} \right) \right] (t) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} t \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^{n-1}} \right] (t) \end{aligned}$$

4. Propuesto.

Ejemplo 3.12.1. Continuando el ejemplo (3.4.1), hay que encontrar las funciones que al ser transformadas por \mathcal{L} , equivalen a cada uno de los sumandos del miembro derecho de la ecuación

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{v_0}{s^2} + \frac{a}{s^3} e^{-t_1 t} - \frac{a}{s^3} e^{-t_2 t} - \frac{g}{s^3}$$

No es difícil darse cuenta de que $\mathcal{L}[v_0t]$, $\mathcal{L}[\frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1)]$, $\mathcal{L}[\frac{-a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2)]$ y $\mathcal{L}[\frac{gt^2}{2}]$ equivalen a cada sumando respectivo. Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[v_0t] + \mathcal{L}[\frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1)] + \mathcal{L}[\frac{-a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2)] + \mathcal{L}[\frac{gt^2}{2}] \\ \mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[v_0t + \frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1) - \frac{a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2) + \frac{gt^2}{2}]\end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación de movimiento del cohete es

$$y(t) = v_0t + \frac{a}{2}(t-t_1)^2H(t-t_1) - \frac{a}{2}(t-t_2)^2H(t-t_2) + \frac{gt^2}{2}$$

Ejemplo 3.12.2. Resolver la EDO $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Aplicando \mathcal{L} a ambos lados, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'' + 2y' + 2y](s) &= \mathcal{L}[0](s) \\ \mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] &= 0 \\ s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0^+) - y'(0^+) + 2(s\mathcal{L}[y](s) - y(0^+)) + 2\mathcal{L}[y](s) &= 0 \\ (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[y](s) &= s + 3 \\ \mathcal{L}[y](s) &= \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 2}\end{aligned}$$

Como las raíces de $s^2 + 2s + 2 = 0$ son complejas, se escribe ese polinomio de la forma $(s + 1)^2 + 1$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](s) &= \frac{s + 3}{(s + 1)^2 + 1} \\ \mathcal{L}[y](s) &= \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{2}{(s + 1)^2 + 1}\end{aligned}$$

Y como $\mathcal{L}[e^{-x} \cos x](s) = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1}$ y $\mathcal{L}[e^{-x} \sin x](s) = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[e^{-x} \cos x](s) + 2\mathcal{L}[e^{-x} \sin x](s) = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \\ \mathcal{L}[y](s) &= \mathcal{L}[e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x](s) \\ y &= e^{-x}(\cos x + 2 \sin x)\end{aligned}$$

La transformada de Laplace también se puede utilizar para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Esto se verá en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Sistemas Lineales de EDO

4.1. Introducción

Hasta aquí se han estudiado ecuaciones lineales con una sola función incógnita. Estudiaremos ahora sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, tanto porque permiten modelar problemas físicos que involucran la interacción de varias funciones incógnita, como también porque a ellos pueden reducirse ecuaciones lineales de grado superior.

Definición 4.1.1. *Un sistema lineal de EDO en \mathbb{K}^n (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) es un sistema de n ecuaciones escrito de la forma*

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad \forall t \in I, \quad X(t_0) = X_0, \quad (4.1)$$

donde $A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, $B(t) \in \mathbb{K}^n$ para cada t en $I \subseteq \mathbb{R}$, I intervalo abierto no vacío y $X_0 \in \mathbb{K}^n$ son condiciones iniciales en $t = t_0 \in I$. En el caso $B \equiv 0$ se dice que el sistema es homogéneo. En el caso que A es una matriz constante, se dice que el sistema es de coeficientes constantes.

4.2. Sistemas Lineales en \mathbb{R}^2

Ejemplo 4.2.1 (Polución en dos estanques). Dos estanques 1 y 2, que contienen $V[m^3]$ de agua, se encuentran interconectados por medio de un canal, por el cual fluye agua desde 1 a 2 a razón de $b[\frac{m^3}{s}]$. El sistema es alimentado a través del estanque 1 a razón de $b[\frac{m^3}{s}]$, con un poluyente de concentración $\sigma[\frac{kg}{m^3}]$, que contamina el agua. El agua sale del sistema por un canal del estanque 2, con un caudal de $b[\frac{m^3}{s}]$. En esta situación se produce una contaminación del agua en ambos estanques. Para tratar de disminuir este efecto negativo, se propone añadir otro canal que conecte a los dos estanques, para que devuelva flujo de 2 a 1, a razón de $b\lambda[\frac{m^3}{s}]$, donde $\lambda > 0$. Sin embargo, para evitar el rebalse del sistema, se debe aumentar el flujo del canal ya existente a $b(1 + \lambda)[\frac{m^3}{s}]$. ¿Cuánto ayuda esta solución a disminuir la polución del agua en los estanques?

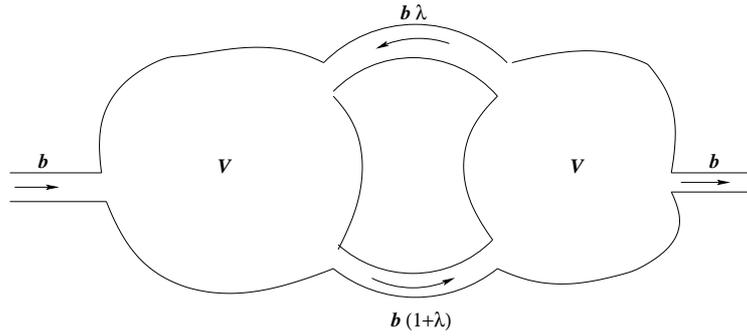


Figura 4.1: Polución en dos estanques del ejemplo 4.2.1

Para el estanque 1, tenemos que la variación de la cantidad de poluyente por unidad de tiempo es la diferencia de las concentraciones que entran y las que salen por unidad de tiempo, es decir:

$$x_1' \left[\frac{kg}{s} \right] = b \left[\frac{m^3}{s} \right] \sigma \left[\frac{kg}{m^3} \right] + b\lambda \left[\frac{m^3}{s} \right] x_2 [kg] \frac{1}{V} \left[\frac{1}{m^3} \right] - b(1+\lambda) \left[\frac{m^3}{s} \right] x_1 [kg] \frac{1}{V} \left[\frac{1}{m^3} \right].$$

Repitiendo el razonamiento para el estanque 2, resulta el sistema:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= b\sigma + \frac{b\lambda}{V}x_2(t) - \frac{b(1+\lambda)}{V}x_1(t) \\ x_2'(t) &= \frac{b(1+\lambda)}{V}x_1(t) - \frac{b\lambda}{V}x_2(t) - \frac{b}{V}x_2(t). \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones, por lo que se puede escribir matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b(1+\lambda)}{V_1} & \frac{b\lambda}{V_2} \\ \frac{b(1+\lambda)}{V_1} & -\frac{b(1+\lambda)}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, es de la forma (4.1), donde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{b(1+\lambda)}{V_1} & \frac{b\lambda}{V_2} \\ \frac{b(1+\lambda)}{V_1} & -\frac{b(1+\lambda)}{V_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

esto es, un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden no homogéneo a coeficientes constantes. \square

Veamos en general como podría resolverse un sistema lineal en \mathbb{R}^2 , utilizando distintos métodos.

Supongamos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (matriz constante) y $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$.

4.2.1. Método de sustitución

Para resolver el sistema,

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \quad (4.3)$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \quad (4.4)$$

con las condiciones iniciales $x_1(0) = x_1^0$ y $x_2(0) = x_2^0$, despejamos x_1 de (4.4), suponiendo $a_{21} \neq 0$, esto es

$$x_1 = \frac{x_2' - a_{22}x_2 - b_2}{a_{21}} \quad (4.5)$$

y luego derivamos:

$$x_1' = \frac{x_2'' - a_{22}x_2' - b_2'}{a_{21}} \quad (4.6)$$

Reemplazando (4.5) y (4.6) en (4.3) resulta:

$$x_2'' - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{traza}(A)}x_2' + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\det(A)}x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 + b_2',$$

que no es más que una ecuación de segundo orden, con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_2(0) &= x_2^0 \\ x_2'(0) &= a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + b_2(0) \end{aligned}$$

y con polinomio característico asociado $P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \det(A - \lambda\mathcal{I})$.

4.2.2. Método de Transformada de Laplace

Si al sistema formado por (4.3) y (4.4) lo consideramos definido para $t > 0$, le aplicamos transformada de Laplace, resulta:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x_1 - x_1^0 &= a_{11}\mathcal{L}x_1 + a_{12}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_1 \\ s\mathcal{L}x_2 - x_2^0 &= a_{21}\mathcal{L}x_1 + a_{22}\mathcal{L}x_2 + \mathcal{L}b_2. \end{aligned}$$

Así tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} (s - a_{11})\mathcal{L}x_1 - a_{12}\mathcal{L}x_2 &= \mathcal{L}b_1 + x_1^0 \quad / (s - a_{22}) \\ -a_{21}\mathcal{L}x_1 + (s - a_{22})\mathcal{L}x_2 &= \mathcal{L}b_2 + x_2^0 \quad / a_{12}, \end{aligned}$$

sumando la ecuaciones resulta:

$$(s - a_{11})(s - a_{22})\mathcal{L}x_1 - a_{12}a_{21}\mathcal{L}x_1 = (s - a_{22})\mathcal{L}b_1 + (s - a_{22})x_1^0 + a_{12}\mathcal{L}b_2 + a_{12}x_2^0.$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}(s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\mathcal{L}x_1 &= \phi(s) \\ P(s)\mathcal{L}(x_1) &= \phi(s),\end{aligned}$$

donde $\phi(s) = (s - a_{22})(\mathcal{L}_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}_2 + x_2^0)$ y $P(s) = s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

De esta forma la solución general del sistema será:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}x_1 &= \frac{(s - a_{22})(\mathcal{L}b_1 + x_1^0) + a_{12}(\mathcal{L}b_2 + x_2^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \mathcal{L}x_2 &= \frac{(s - a_{11})(\mathcal{L}b_2 + x_2^0) + a_{21}(\mathcal{L}b_1 + x_1^0)}{s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2 (continuación polución en dos estanques). Volviendo al ejemplo de los estanques, si reemplazamos los valores que teníamos en ese sistema, se obtiene:

$$\left(s^2 + b(1 + \lambda)\left(\frac{1}{V} + \frac{1}{V}\right)s + \frac{b^2(1 + \lambda)}{V^2}\right)\mathcal{L}x_1 = \left(s + \frac{b(1 + \lambda)}{V}\right)\left(\frac{b\sigma}{s} + x_1^0\right) + \frac{bx_2^0\lambda}{V}.$$

Resolvamos la ecuación cuadrática del lado izquierdo:

$$s = \frac{-b(1 + \lambda)}{V} \pm \frac{b(1 + \lambda)}{V} \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \lambda}}}_{\theta},$$

y como $\lambda \geq 0 \implies 1 \geq \theta \geq 0$, y por tanto resulta:

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{-b(1 + \lambda)}{V}(1 + \theta) < 0 \quad \text{si } \lambda \geq 0 \\ s_2 &= \frac{-b(1 + \lambda)}{V}(1 - \theta) < 0 \quad \text{si } \lambda \geq 0.\end{aligned}$$

Si introducimos los parámetros

$$\alpha = \frac{b(1 + \lambda)}{V}, \quad \beta = \frac{b\lambda}{V},$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}x_1 &= \frac{b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0}{(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} + \frac{sx_1^0}{(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} \\ \mathcal{L}x_2 &= \frac{\alpha(x_1^0 + x_2^0)}{(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} + \frac{sx_2^0}{(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))} + \frac{\alpha b\sigma}{s(s + \alpha(1 + \theta))(s + \alpha(1 - \theta))}.\end{aligned}$$

Los tres sumandos de cada ecuación anterior tienen una antitransformada conocida:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) &= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right) &= \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}\right) &= \frac{(c-b)e^{at} + (a-c)e^{bt} + (b-a)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto las soluciones son:

$$\begin{aligned}x_1 &= -(b\sigma + \alpha x_1^0 + \beta x_2^0) \frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} + x_1^0 \frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} + \\ &\quad \alpha b\sigma \frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)} \\ x_2 &= -\alpha(x_1^0 + x_2^0) \frac{e^{-\alpha(1+\theta)t} - e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\alpha\theta} + x_2^0 \frac{(1+\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1-\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t}}{2\theta} + \\ &\quad \alpha b\sigma \frac{(1-\theta)e^{-\alpha(1+\theta)t} - (1+\theta)e^{-\alpha(1-\theta)t} + 2\theta}{2\alpha^2\theta(1-\theta^2)}.\end{aligned}$$

Luego

$$x_1 = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + C_3,$$

donde C_1, C_2, C_3 son constantes dadas de la agrupación de términos semejantes en la expresión anterior, que por tanto dependen sólo de las condiciones iniciales y de la geometría del sistema. Para x_2 se obtiene análogamente:

$$x_2 = C'_1 e^{s_1 t} + C'_2 e^{s_2 t} + C'_3,$$

con C'_1, C'_2, C'_3 constantes. Es importante notar que estas soluciones son estables, es decir, que cuando $t \rightarrow \infty$ las soluciones convergen a una solución determinada, y puesto que $s_1, s_2 < 0$, entonces :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= C_3 = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= C'_3 = \frac{b\sigma}{\alpha(1-\theta^2)} = \sigma V,\end{aligned}$$

por lo que concluimos que después de un tiempo suficientemente largo, la cantidad de poluente en cada estanque será muy cercana a σV , independientemente del valor de λ , es decir, tenemos la misma solución que si $\lambda = 0$, que era como inicialmente estaba el sistema de estanques. En realidad la situación es más compleja, ya que graficando las soluciones para $\lambda > 0$ y $\lambda = 0$ se aprecia que la polución es menor en el caso $\lambda > 0$ para un intervalo de t considerable (aunque el límite es el mismo). Ver figura (4.2).

□

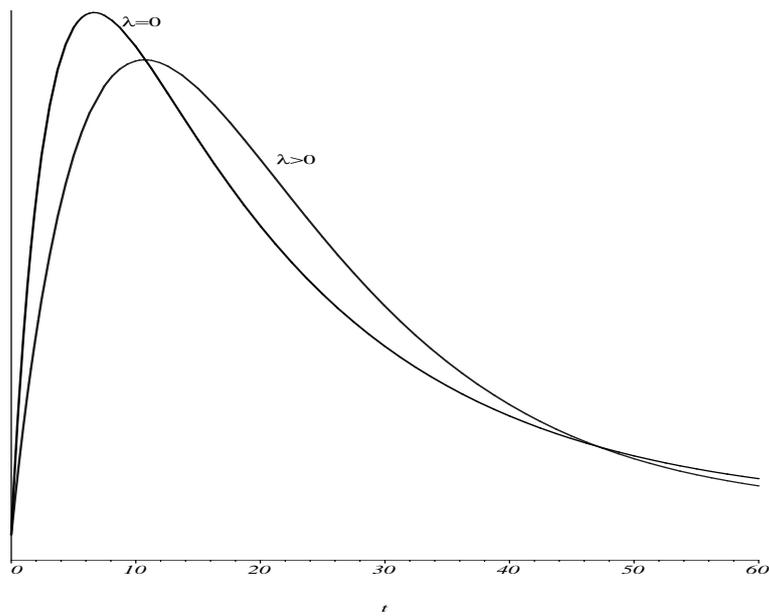


Figura 4.2: Comportamiento de la polución en estanque 2 del ejemplo 4.2.2

Veamos ahora el método de la Transformada de Laplace en caso de un sistema lineal general *a* coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} X' &= AX + B(t), & B, X \in \mathbb{R}^n, A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ X(0) &= X_0, & X_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Analizamos la *i*-ésima fila del sistema:

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad x_i(0) = x_i^0.$$

Aplicando Transformada de Laplace a cada ecuación:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}x_i - x_i^0 &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathcal{L}x_j + \mathcal{L}b_i, & i = 1, \dots, n \\ s\mathcal{L}x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathcal{L}x_j &= \mathcal{L}b_i - x_i^0, & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

O bien, matricialmente:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}X - A\mathcal{L}X &= \mathcal{L}B + X_0 \\ sI\mathcal{L}X - A\mathcal{L}X &= \mathcal{L}B + X_0, \end{aligned}$$

esto es:

$$(sI - A)\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(B) + X_0.$$

De esta forma, si $(sI - A) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es invertible (en realidad basta tomar $s > \max \Re \sigma(A)$, donde $\Re \sigma(A)$ son la parte real de los valores propios de A), podemos despejar $\mathcal{L}(X)$:

$$\mathcal{L}(X) = (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}(B) + X_0)$$

que es la generalización de la transformada de Laplace a sistemas donde A es una matriz a coeficientes constantes. De lo anterior se deduce que:

Teorema 4.2.1. *La solución del sistema lineal (4.1), donde $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tiene coeficientes constantes, está dada por $\mathcal{L}(X) = (sI - A)^{-1}(\mathcal{L}(B) + X_0)$, $\forall s > \max \Re \sigma(A)$.*

Ejemplo 4.2.3 (Masas atmosféricas). El siguiente es un modelo para la evolución de las masas atmosféricas en kilotoneladas [kton] de un contaminante en el hemisferio norte (c_1) y el hemisferio sur (c_2) de la Tierra (ver figura 4.2.3):

$$c_1' = f_1 - \alpha(c_1 - c_2) - \beta c_1 \tag{4.7}$$

$$c_2' = f_2 - \alpha(c_2 - c_1) - \beta c_2. \tag{4.8}$$

La constante $\alpha > 0$ representa inverso del tiempo de intercambio interhemisférico en [1/año] y la constante $\beta > 0$ (desconocida) el inverso del tiempo de vida química del contaminante en [1/año]. Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son constantes conocidas $f_1 = 30$ y $f_2 = 10$ en [kton/año]. Inicialmente $c_1^0 = 84$ y $c_2^0 = 60$ en [kton].

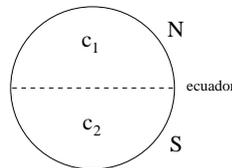


Figura 4.3: Masas atmosféricas del ejemplo 4.2.3

Introduzcamos la masa media entre los dos hemisferios como $\bar{c}(t) = \frac{1}{2}(c_1(t) + c_2(t))$ y la emisión media como $\bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Si derivamos la expresión de la masa media con respecto al tiempo obtenemos:

$$\bar{c}'(t) = \frac{1}{2}(c_1'(t) + c_2'(t)).$$

Luego, si sumamos las EDO que tenemos para c_1 y c_2 , nos queda:

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' &= 2\bar{c}' = (f_1 + f_2) - \alpha(c_1 - c_2 + c_2 - c_1) - \beta(c_1 + c_2) \\ \bar{c}' &= \bar{f} - \beta\bar{c} \end{aligned}$$

que es una EDO para \bar{c} , con condición inicial dada por

$$\bar{c}(0) = \frac{1}{2}(c_1(0) + c_2(0)) = \frac{1}{2}(84 + 60)[kton] = 72[kton].$$

Un método sencillo para resolver la EDO anterior es considerar la ecuación homogénea asociada y la solución particular, $\bar{c}_{part} = cte = \bar{f}/\beta$.

La homogénea,

$$\bar{c}' + \beta\bar{c} = 0,$$

tiene asociado el polinomio característico $\lambda + \beta = 0$, de donde:

$$\bar{c}_{hom} = Ae^{-\beta t}, \quad A \text{ constante a determinar.}$$

Luego, la solución final es:

$$\bar{c}(t) = Ae^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta},$$

de aquí que $\bar{c}(0) = 72 = Ae^0 + \bar{f}/\beta = A + \bar{f}/\beta$.

Luego $A = 72 - \bar{f}/\beta$ y

$$\bar{c}(t) = 72e^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

Si se estima que el límite de $\bar{c}(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ es de 100 [kton], podemos encontrar una estimación para β^{-1} , esto es, para los años de vida del contaminante:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{c}(t) = 100[kton] = \lim_{t \rightarrow \infty} [72e^{-\beta t} + \frac{\bar{f}}{\beta}(1 - e^{-\beta t})] = \frac{\bar{f}}{\beta},$$

pero $\bar{f} = 20$ [kton/año]. Luego,

$$\beta^{-1} = \frac{100[kton]}{20[kton/año]} = 5 \text{ [años]}.$$

Por lo tanto, los años de vida de cada contaminante son 5 años.

Para resolver el sistema dado por (4.7) y (4.8) podemos utilizar el método de la Transformada de Laplace a sistemas lineales. Si escribimos matricialmente el sistema de la forma $C' = AC + B$, con

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha \\ \alpha & -\alpha - \beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

entonces, usando el Teorema 4.2.1

$$(sI - A)^{-1}(\mathcal{L}B + X_0) = \begin{pmatrix} s + \alpha + \beta & -\alpha \\ -\alpha & s + \alpha + \beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{f_1}{s} + c_1^0 \\ \frac{f_2}{s} + c_2^0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (f_1 + c_2^0\alpha + c_1^0\alpha + c_1^0\beta)\phi_1(s) + c_1^0\phi_2(s) + (f_1\alpha + f_1\beta + f_2\alpha)\phi_3(s) \\ (f_2 + c_1^0\alpha + c_2^0\alpha + c_2^0\beta)\phi_1(s) + c_2^0\phi_2(s) + (f_2\alpha + f_2\beta + f_1\alpha)\phi_3(s) \end{pmatrix},$$

donde

$$\phi_1(s) = \frac{1}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}, \quad \phi_2(s) = \frac{s}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}, \quad \phi_3(s) = \frac{1}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}.$$

Para terminar, sólo falta encontrar las antitransformadas de cada componente del vector, lo que se reduce a encontrar las antitransformadas de ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 . Para esto usaremos una buena receta: si

$$\phi(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \frac{C}{s-c},$$

con a , b y c distintos, entonces

$$A = \lim_{s \rightarrow a} (s-a)\phi(s), \quad B = \lim_{s \rightarrow b} (s-b)\phi(s), \quad \text{y} \quad C = \lim_{s \rightarrow c} (s-c)\phi(s).$$

Como $\phi_1(s) = \frac{1}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = \frac{A_1}{s+\beta} + \frac{B_1}{s+2\alpha+\beta}$, hallamos A_1 :

$$\lim_{s \rightarrow -\beta} \phi_1(s)(s+\beta) = A_1 = \lim_{s \rightarrow -\beta} \frac{s+\beta}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = \lim_{s \rightarrow -\beta} \frac{1}{s+2\alpha+\beta} = \frac{1}{2\alpha}.$$

De la misma manera, $B_1 = -\frac{1}{2\alpha}$, luego,

$$\phi_1(s) = \frac{1}{2\alpha(s+\beta)} - \frac{1}{2\alpha(s+2\alpha+\beta)}.$$

Para ϕ_2 ,

$$\phi_2(s) = \frac{s}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = s \left[\frac{A_2}{s+\beta} + \frac{B_2}{s+2\alpha+\beta} \right] = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{s}{s+\beta} - \frac{s}{s+2\alpha+\beta} \right].$$

Por último,

$$\phi_3(s) = \frac{A_3}{s} + \frac{B_3}{s+\beta} + \frac{C_3}{s+2\alpha+\beta},$$

y utilizando la receta,

$$\begin{aligned} A_3 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)} \\ B_3 &= \lim_{s \rightarrow -\beta} \frac{s+\beta}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = -\frac{1}{2\alpha\beta} \\ C_3 &= \lim_{s \rightarrow -(2\alpha+\beta)} \frac{s+2\alpha+\beta}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)} = \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Aplicando ahora antitransformada a estas funciones, recordando que $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}$, y $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+a}\right] = \delta(t) - ae^{-at}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\phi_1(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\alpha(s+\beta)} - \frac{1}{2\alpha(s+2\alpha+\beta)}\right] = \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\beta}\right] - \frac{1}{2\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta}\right] \\ &= \frac{1}{2\alpha}e^{-\beta t} - \frac{1}{2\alpha}e^{-(2\alpha+\beta)t} \\ \mathcal{L}^{-1}[\phi_2(s)] &= \frac{1}{2\alpha}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+\beta}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+2\alpha+\beta}\right]\right) = \frac{1}{2\alpha}(\delta(t) - \beta e^{-\beta t} - \delta(t) + (2\alpha+\beta)e^{-(2\alpha+\beta)t}) \\ &= \frac{1}{2\alpha}((2\alpha+\beta)e^{-(2\alpha+\beta)t} - \beta e^{-\beta t}) \\ \mathcal{L}^{-1}[\phi_3(s)] &= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2\alpha\beta}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\beta}\right] + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2\alpha+\beta}\right] \\ &= \frac{1}{\beta(2\alpha+\beta)} - \frac{1}{2\alpha\beta}e^{-\beta t} + \frac{1}{2\alpha(2\alpha+\beta)}e^{-(2\alpha+\beta)t}.\end{aligned}$$

Finalmente, agrupando constantes, la cantidad de contaminante en cada hemisferio resulta:

$$\begin{aligned}c_1(t) &= p_1e^{-\beta t} + q_1e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_1 \\ c_2(t) &= p_2e^{-\beta t} + q_2e^{-(2\alpha+\beta)t} + r_2,\end{aligned}$$

donde $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$, son constantes dependientes sólo de $c_1^0, c_2^0, f_1, f_2, \alpha$ y β .

Es interesante notar que después de un tiempo suficientemente largo, se llega a un equilibrio en las cantidades de contaminación, que para el hemisferio Norte es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1 = r_1 = \frac{(\alpha+\beta)f_1 + \alpha f_2}{\beta(2\alpha+\beta)}$$

y para el hemisferio Sur es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_2 = r_2 = \frac{\alpha f_1 + (\alpha+\beta)f_2}{\beta(2\alpha+\beta)}.$$

□

4.3. Existencia y Unicidad

Dado que los sistemas lineales se pueden escribir de forma tan similar a las ecuaciones lineales de primer orden escalares, y además todavía sirven métodos como Laplace (extendido a matrices), queremos tener otras buenas propiedades, en particular un Teorema de Existencia y Unicidad. Para ello partamos suponiendo que resolveremos el sistema en un subintervalo I_0 cerrado y acotado de I y $t_0 \in I_0$. Introduzcamos algunos espacios:

Definición 4.3.1. $\mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \text{las componentes } f_i \text{ de } f \text{ son funciones continuas en } I_0, \forall i = 1, \dots, n\}$.

Definición 4.3.2. $\mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^{n \times n}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{las componentes } f_{ij} \text{ de } f \text{ son funciones continuas en } I_0, \forall i, j = 1, \dots, n\}$.

Teorema 4.3.1 (Existencia y Unicidad). Si $A \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^{n \times n})$ y $B \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$, entonces dado $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in I_0$, existe una única solución $X \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ del sistema lineal:

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t), \quad t \in I_0 \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

tal que $X' \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$.

Para la demostración de este teorema primero escribiremos el sistema diferencial en forma integral. Luego, usaremos un operador que entregue esta forma integral y veremos que sus puntos fijos son soluciones del sistema en cuestión. Finalmente, demostraremos que la aplicación es contractante, utilizando una norma apropiada y concluiremos que tiene un único punto fijo. En realidad, esta demostración hace uso del Teorema del punto fijo, que se deduce del hecho de que toda sucesión de Cauchy es convergente. Esto es cierto en $\mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ con la norma del supremo u otra similar, siempre que I_0 sea cerrado y acotado.

1. Supongamos por un momento que $X(t) \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$. Además, dado que $A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ y $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, tenemos la continuidad de $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$. Tomando la coordenada i -ésima,

$$x'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t).$$

Integrando entre t_0 y t , con $t \in I_0$

$$\int_{t_0}^t x'_i(s)ds = \int_{t_0}^t \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(s)x_j(s) + b_i(s) \right) ds.$$

Luego, por Teo. Fundamental del Cálculo

$$x_i(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^t \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(s)x_j(s) + b_i(s) \right) ds.$$

Escribiendo matricialmente, lo anterior se traduce en:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)X(s) + B(s))ds,$$

donde la integral de un vector se entiende como la integral de cada componente.

2. Para X_0 fijo, definamos la aplicación:

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n) \\ X &\rightarrow \Psi(X),\end{aligned}$$

donde $\Psi(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)X(s) + B(s))ds, \forall t \in I_0$, de esta forma si Ψ tiene algún punto fijo, es decir, si existe una función $\bar{X} \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$ tal que $\bar{X} = \Psi(\bar{X})$, está será la solución (continua) que estamos buscando.

3. Para estudiar la convergencia en el espacio vectorial $\mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$, introduciremos la norma

$$\|X(\cdot)\|_M = \sup_{t \in I_0} \{e^{-2M|t-t_0|} \|X(t)\|_2\},$$

donde $\|\cdot\|_2$ representa la norma euclidiana de \mathbb{R}^n , que de ahora en adelante denotaremos simplemente como $\|\cdot\|$. Es sencillo verificar que la norma recién definida efectivamente es una norma, lo que se deja al lector.

También es útil introducir la norma de Frobenius para matrices en $M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Antes de seguir, reparemos en algunas propiedades. Sea $Y \in \mathbb{R}^n$, supongamos sin pérdida de generalidad que $I_0 = [t_0, t_0 + T]$, para algún $T > 0$, entonces:

$$(a) \left\| \int_{t_0}^t Y(s) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|Y(s)\| ds, \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

$$(b) \|A(s)Y(s)\| \leq M \|Y(s)\|, \text{ con } M \in \mathbb{R} \text{ (constante), } \forall s \in [t_0, t_0 + T].$$

La propiedad (a) Es sencilla usando la propiedad de monotonía de las integrales reales y Cauchy-Schwartz. Para ver (b) notemos que:

$$\begin{aligned}\|A(s)Y(s)\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(s)y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(s)y_j \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(s)y_j \right)^2 \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2(s) \cdot \sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(s) \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \\ &= \|A(s)\|_F^2 \|Y\|^2.\end{aligned}$$

Pero $\|A(s)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2(s)}$ es una función continua de s en un intervalo cerrado y acotado, por lo que alcanza su máximo, que llamaremos M , de donde se tiene la propiedad (b).

Veamos ahora que Ψ es contractante para la nueva norma $\|\cdot\|_M$, (el M escogido al crear la norma es justamente el M de la propiedad (b)). Sean $Y, Z \in \mathcal{C}(I_0, \mathbb{R}^n)$, calculemos para $t \in I_0$

$$\begin{aligned}
\|\Psi(Y)(t) - \Psi(Z)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s))ds - \int_{t_0}^t (A(s)Z(s) + B(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^t A(s)(Y(s) - Z(s))ds \right\| \\
&\stackrel{\text{por (a)}}{\leq} \int_{t_0}^t \|A(s)(Y(s) - Z(s))\| ds \\
&\stackrel{\text{por (b)}}{\leq} M \int_{t_0}^t \|Y(s) - Z(s)\| ds \\
&= M \int_{t_0}^t \|Y(s) - Z(s)\| e^{2M(s-t_0)} e^{-2M(s-t_0)} ds \\
&\leq M \|Y - Z\|_M \int_{t_0}^t e^{2M(s-t_0)} ds \\
&= M \|Y - Z\|_M \cdot \left(\frac{e^{2M(t-t_0)}}{2M} - \frac{e^{2M(t_0-t_0)}}{2M} \right) \\
&= \frac{e^{2M(t-t_0)}}{2} \|Y - Z\|_M \underbrace{- \frac{1}{2} \|Y - Z\|_M}_{\leq 0} \\
&\leq \frac{e^{2M(t-t_0)}}{2} \|Y - Z\|_M.
\end{aligned}$$

Luego tenemos $\forall t \in I_0$:

$$e^{-2M(t-t_0)} \|\Psi(Y)(t) - \Psi(Z)(t)\| \leq \frac{1}{2} \|Y - Z\|_M.$$

Tomando supremo

$$\begin{aligned}
e^{-2M(t-t_0)} \|\Psi(Y)(t) - \Psi(Z)(t)\| &\leq \frac{1}{2} \|Y - Z\|_M \quad / \cdot \sup_{t \in I_0} \\
\|\Psi(Y) - \Psi(Z)\|_M &\leq \frac{1}{2} \|Y - Z\|_M.
\end{aligned}$$

Por la tanto Ψ es contractante con constante $L = 1/2$.

4. Recordando el Teo. de Punto fijo de Banach:

Teorema 4.3.2 (Punto fijo de Banach). *Sea un espacio X dotado de una norma tal que toda sucesión de Cauchy es convergente, y sea $\Psi : X \rightarrow X$ una contracción, entonces existe un único punto fijo $\bar{x} \in X$.*

Tenemos que existe un único punto fijo de la aplicación construida, y por ende una única solución del sistema lineal estudiado. Notar que *a posteriori*, la solución es continua y del sistema se deduce que su derivada también lo es.

Observación. En el teorema anterior demostramos que existe una única solución del sistema lineal de primer orden, suponiendo que I_0 era un intervalo cerrado y acotado. En el caso que el problema este definido en un intervalo I con un extremo abierto acotado, es decir, de la forma $I = [t_0, t_0 + T[$, se construye una solución $X_n \in [t_0, t_0 + T - \frac{1}{n}]$, y se considera la solución:

$$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T[.$$

Notar que lo anterior define puntualmente la solución. Para ver que el límite está bien definido, tomemos $\bar{t} \in I$, se tiene entonces que $\exists n_0 : \bar{t} \in [t_0, t_0 + T - \frac{1}{n}]$, $\forall n \geq n_0$. Además, $X_n(\bar{t})$ es constante, $\forall n \geq n_0$, pues de lo contrario se tendrían por lo menos dos soluciones de la misma ecuación diferencial definidas en un intervalo cerrado y acotado que difieren en \bar{t} , lo que contradice el Teo. de Existencia y Unicidad demostrado. Así, la sucesión $X_n(\bar{t})$ tiene garantizada la convergencia. También hay que considerar que la solución no tiene que ser necesariamente acotada, y puede diverger en T , por ejemplo en el caso en que A y B sean funciones no acotadas en el intervalo estudiado.

En el caso en que I no fuese acotado, por ejemplo $I = [t_0, \infty[$, se construye una solución $X_n \in I = [t_0, n]$, y se considera la solución

$$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) \quad \forall t \in [t_0, \infty[.$$

Las mismas notas sobre la correcta definición de este límite puntual anteriormente hechas, siguen siendo válidas.

Corolarios 4.3.1. (a) *Si un sistema lineal homogéneo tiene una condición inicial nula, entonces la única solución del sistema es la función nula.*

$$\left. \begin{array}{l} X' = AX \\ X(t_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X(t) = 0, \quad \forall t \in I$$

(b) *Si tenemos un sistema lineal con dos trayectorias que coinciden en un punto, entonces son la misma; interpretado de otra forma, dos trayectorias $X(t)$ e $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ distintas no se cruzan (determinismo).*

$$\left. \begin{array}{l} X' = A(t)X + B(t) \\ Y' = A(t)Y + B(t) \\ X(t_0) = Y(t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow X(t) = Y(t), \quad \forall t \in I$$

4.4. Sistemas Homogéneos

En ecuaciones diferenciales es habitual estudiar primero las soluciones de la parte homogénea de las ecuaciones, porque ellas entregan importante información para luego deducir las soluciones generales. Partamos entonces estudiando detenidamente los sistemas homogéneos.

Definición 4.4.1.

$$H = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X, t \in I\}.$$

Definición 4.4.2.

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X' = A(t)X + B(t), t \in I\}.$$

Además, del Teo. de Existencia y Unicidad, sabemos que para cualquier condición inicial, el sistema lineal homogéneo tiene una única solución, en particular para la base canónica de \mathbb{R}^n , y entonces podemos dar la siguiente definición:

Definición 4.4.3. *Llamaremos ϕ_k solución fundamental canónica k -ésima asociada a $t_0 \in I$ a la solución del sistema:*

$$\begin{aligned}\phi_k' &= A(t)\phi_k, & t \in I \\ \phi_k(t_0) &= e_k, & \forall k = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

A la matriz formada por las soluciones fundamentales canónicas asociada a t_0 , es decir, que en su columna k -ésima tiene a ϕ_k , se llamará matriz canónica fundamental asociada a t_0 , y se denotará por Φ

Teorema 4.4.1. *El conjunto $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ es una base de H , y por lo tanto, $\dim(H) = n$. A esta base se le llama base fundamental canónica*

Ejemplo 4.4.1 (Cadena con resortes). Se tiene una cadena con extremos fijos formada por n cuentas conectadas por resortes idénticos de constante elástica k y largo natural l_0 . Cada cuenta de masa m_i , $i = 1 \dots n$, tiene libertad para oscilar horizontalmente, pero cada una presenta un rozamiento lineal con el medio, de constante c_i , $i = 1 \dots n$. Para cada cuenta tenemos la ecuación de movimiento:

$$m_i x_i'' = -c_i x_i' - k[(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})], \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

donde se ha definido $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Matricialmente tenemos:

$$\begin{pmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_{n-1} & \\ & & & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}'' = - \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & c_{n-1} & \\ & & & & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' - k \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix},$$

es decir, tiene la forma

$$MX'' + CX' + KX = 0,$$

con $X \in \mathbb{R}^n$. Para transformarlo en un sistema lineal, hacemos el cambio de variables:

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} \Rightarrow Z' = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix},$$

pero

$$X'' = -M^{-1}KX - M^{-1}CX'.$$

Por lo tanto, se puede escribir el sistema lineal:

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} Z.$$

Para determinar el conjunto de soluciones fundamentales asociadas, por ejemplo, al origen, bastará resolver el sistema anterior con condiciones iniciales en cada vector canónico de \mathbb{R}^{2n}

$$Z(0) = e_k.$$

(En total son $2n$ sistemas con condiciones iniciales a resolver). □

Demostración del Teorema 4.4.1. Partamos probando que efectivamente es generador, es decir,

$$\langle \{\phi_k\}_{k=1}^n \rangle = H.$$

Sea $X_h \in H$ la solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} X_h' &= AX_h, \quad \forall t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

Descompongamos X_0 en la base canónica de \mathbb{R}^n :

$$X_0 = x_0^1 e_1 + \cdots + x_0^n e_n, \quad x_0^1, \dots, x_0^n \in \mathbb{R}.$$

Demostremos que $X_h = x_0^1 \phi_1 + \cdots + x_0^n \phi_n$; para esto definimos $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned} Z(t) &= x_0^1 \phi_1 + \cdots + x_0^n \phi_n, & \phi_k &= \phi_k(t) \\ \Rightarrow Z'(t) &= x_0^1 \phi_1' + \cdots + x_0^n \phi_n', & \text{pero } \phi_k' &= A\phi_k \\ \Rightarrow Z(t) &= A(x_0^1 \phi_1 + \cdots + x_0^n \phi_n) = AZ(t) \end{aligned}$$

Y además, por la definición de los ϕ_k tenemos que: $Z(t_0) = x_0^1 e_1 + \cdots + x_0^n e_n$

$\therefore Z$ es solución del mismo sistema de ecuaciones diferenciales que X_h , con las mismas condiciones iniciales. Luego, por teorema de existencia y unicidad, $Z(t) = X_h(t) \quad \forall t \in I$

Observación. Notar que lo anterior demuestra también que si se tienen soluciones del sistema homogéneo, entonces cualquier combinación lineal de ellas también satisface el sistema, salvo las condiciones iniciales.

Ahora veamos que $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ son soluciones l.i.,

P.d.q.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t) = 0, \quad \forall t \Rightarrow \alpha_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \end{pmatrix}}_{\Phi} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si pudiéramos probar que $\det(\Phi(t)) \neq 0, \forall t$, entonces la única solución del sistema es $\vec{\alpha} = 0$, que era lo que hay que demostrar. Se define el Wronskiano de una familia de funciones vectoriales, justamente como el determinante de la matriz que tiene en sus columnas dichas funciones, así

$$W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \det(\Phi)$$

Notamos también que:

$$W(t_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(I_n) = 1$$

Así el Wronskiano es no nulo en un punto, lo que implica que no se anula en todo el intervalo. En efecto, razonando por contradicción, supongamos que existe $\bar{t} \in I$ tal que $W(\bar{t}) = 0$, como

el Wronskiano corresponde al determinante de la matriz fundamental canónica, tenemos que esta matriz tiene sus columnas l.d., es decir, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ constantes no todas nulas, tal que:

$$\alpha_1 \phi_1(\bar{t}) + \dots + \alpha_n \phi_n(\bar{t}) = 0$$

Pero vimos que cualquier combinación lineal de soluciones fundamentales canónicas, también es solución del sistema homogéneo, y claramente la función nula también es solución con la condición inicial impuesta en \bar{t} . Por lo tanto, por Teo. de Existencia y Unicidad,

$$\alpha_1 \phi_1(t) + \dots + \alpha_n \phi_n(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

lo que es una contradicción, pues en t_0 no se cumple. Luego, concluimos la independencia lineal buscada, y por tanto, $\dim(H) = n$ \square

Corolario 4.4.1. *La solución del sistema homogéneo*

$$\begin{aligned} X'_h &= AX_h \quad \forall t \in I \\ X_h(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

está dada por

$$X_h = x_0^1 \phi_1 + \dots + x_0^n \phi_n,$$

o equivalentemente

$$X_h = \Phi(t)X_0.$$

Corolario 4.4.2 (Propiedades de la matriz canónica fundamental Φ asociada a t_0).

(a) $\Phi(t_0) = I_n$

(b) $\Phi'(t) = A\Phi(t)$

(c) Φ es única.

(d) Φ es invertible, $\forall t \in I$

Demostración. (a) Es directa de la definición.

(b) Entendiendo la derivada en el sentido que se deriva componente a componente, se tiene que:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \vdots & \vdots & \phi_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\phi_1 & A\phi_2 & \vdots & \vdots & A\phi_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \vdots & \vdots & \phi_n \end{pmatrix} = A\Phi$$

(c) Se concluye por Teo. de Existencia y Unicidad aplicado al sistema formado por (b), con las condiciones iniciales de (a).

(d) Se probó en la demostración del teorema anterior que si:

$$\exists t_0 \det(\Phi(t_0)) \neq 0 \Rightarrow \forall t \in I \det(\Phi(t)) \neq 0$$

Lo que prueba lo pedido, pues $\det(\Phi(t_0)) = 1$.

\square

Para generalizar los resultados anteriores, definamos una matriz fundamental (no necesariamente canónica) como la matriz $M(t) = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \vdots & \vdots & \psi_n \end{bmatrix}$, $\forall t \in I$, donde ψ son soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} \psi'_k &= A(t)\psi_k, & t, t_0 \in I \\ \psi_k(t_0) &= v_k, & \forall k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ es una base (no necesariamente canónica) de \mathbb{R}^n , y entonces concluimos el siguiente corolario:

Corolario 4.4.3. *Sea una matriz fundamental $M(t)$, entonces:*

- (i) *Si existe t_0 tal que $\det(M(t_0)) \neq 0$, entonces $\det(M(t)) \neq 0$, $\forall t \in I$.*
- (ii) *Si el sistema $X' = AX$ tiene condiciones iniciales X_0 no nulas, entonces $X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X_0$.*

Demostración. (i) Consecuencia directa.

(ii) De la observación del teorema anterior, tenemos que una combinación lineal de los ψ_i resuelve el sistema, es decir:

$$X(t) = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n = MC$$

donde el vector $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ queda dado por las condiciones iniciales, entonces

$$X(t_0) = M(t_0)C \Rightarrow C = M(t_0)^{-1}X_0 \Rightarrow X(t) = M(t)M^{-1}(t_0)X_0$$

□

4.5. Soluciones Particulares

Teniendo bien estudiadas las soluciones del sistema homogéneo, sólo falta encontrar las soluciones particulares, gracias a que se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.5.1. *Dada una solución particular X_p de $X' = AX + B$, toda solución del sistema se escribe como suma de X_p y alguna solución del sistema homogéneo.*

$$X_G = X_p + X_h.$$

Demostración. Sea X_G una solución general del sistema, y X_p una particular, entonces:

$$\begin{aligned} X'_G &= AX_G + B \\ X'_p &= AX_p + B, \end{aligned}$$

restando las ecuaciones:

$$(X_G - X_p)' = A(X_G - X_p).$$

Luego $X_G - X_p$ es solución de la homogénea, es decir:

$$X_h = X_G - X_p \Rightarrow X_G = X_p + X_h.$$

□

Ahora, buscamos una fórmula de variación de parámetros, es decir, buscamos $X_p = \Phi(t)C(t)$, ecuación que podemos reemplazar en $X_p' = AX_p + B$, pero falta una fórmula para derivar productos de matrices, que se estudia en el siguiente lema:

Lema 4.5.1. Sean $A(t) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B(t) \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$, $X(t) \in \mathbb{R}^n$

$$i) (A(t)X(t))' = A'(t)X(t) + A(t)X'(t)$$

$$ii) (A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

Demostración. (i) Por componentes:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) \right)' &= \sum_{j=1}^n (a_{ij}(t)x_j(t))' = \sum_{j=1}^n (a'_{ij}(t)x_j(t) + a_{ij}(t)x'_j(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n a'_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x'_j(t) \end{aligned}$$

(ii) Análogo.

□

Luego, volviendo al problema de variación de parámetros, podemos reemplazar $X_p = \Phi(t)C(t)$ y derivar:

$$\begin{aligned} X_p'(t) &= A(t)X_p(t) + B(t) \\ \Rightarrow (\Phi(t)C(t))' &= A(t)\Phi(t)C(t) + B(t) \\ \Rightarrow \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) &= A(t)\Phi(t)C(t) + B(t) \\ \Rightarrow C'(t) &= \Phi^{-1}(t)B(t) \\ \Rightarrow C(t) &= \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_p = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds$, y se concluye el siguiente teorema

Teorema 4.5.2 (Variación de Parámetros). La solución del sistema:

$$\begin{aligned} X'(t) &= A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned}$$

está dado por :

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

donde Φ es la matriz fundamental canónica asociada a t_0 .

4.6. Exponencial de una Matriz

Para calcular $\Phi(t)$ resulta útil la noción de exponencial de una matriz:

Definición 4.6.1 (Exponencial de una Matriz). Sea $M(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. La exponencial de M se define como:

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots + \frac{M^n}{n!} + \cdots$$

Como estamos tratando en general con series de funciones en cada componente, es útil tener presente el siguiente lema:

Lema 4.6.1 (Criterio M de Weierstrass). Sean $f_k : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}$ funciones. Si existe una sucesión $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de reales positivos tales que

$$|f_k(x)| \leq M_k, \forall n > n_0, \forall x \in S,$$

y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente en S .

Demostración. Como $|f_k(x)| \leq M_k, \forall n > n_0, \forall x \in S$, por criterio de comparación de series tenemos que para cada $x \in S$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge (convergencia puntual). Definamos entonces $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

Sean $m > n > n_0$, hagamos la diferencia

$$\left| \sum_{k=1}^m f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k = \sum_{k=1}^m M_k - \sum_{k=1}^n M_k.$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, podemos tomar límite $m \rightarrow \infty$:

$$\left| g(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^n M_k.$$

Pero como la serie de los M_k converge, tenemos que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > n_0, \forall n \geq N, \left| g(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \epsilon, \forall x \in S.$$

Recordando que $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, se tiene la convergencia uniforme. □

Teorema 4.6.1. Si las componentes de la matriz $M(t)$ están uniformemente acotadas en un intervalo I , entonces cada componente de $e^{M(t)}$ converge uniformemente en I .

Demostración. P.d.q. $(e^{M(t)})_{ij}$ converge uniformemente en I .

Tenemos por definición que

$$(e^{M(t)})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!}.$$

Esto es una serie de funciones, por lo que para demostrar la convergencia uniforme usaremos el criterio M de Weierstrass. Veamos que, como cada componente está uniformemente acotada en I , se tiene:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall i, j \quad |(M(t))_{ij}| \leq \alpha, \forall t \in I.$$

Luego,

$$\forall i, j \quad |(M^2)_{ij}| \leq \left| \sum_{k=1}^n (M)_{ik}(M)_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |(M)_{ik}| |(M)_{kj}| \leq \alpha^2 n$$

Así, por inducción, se tiene:

$$\forall k > 0 \quad \forall i, j \quad |(M^k)_{ij}| \leq \alpha^k n^{k-1}, \forall t \in I.$$

De esta forma encontramos una cota para los términos de la serie independiente de t

$$\forall k > 0 \quad \forall i, j \quad \left| \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!} \right| \leq \alpha^k n^{k-1}, \forall t \in I.$$

Sólo falta ver que la serie se estas cotas converge, en efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \frac{\alpha^k n^{k-1}}{k!} &= \sum_{k=0}^p \frac{\alpha^k n^{k-1}}{k!} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^p \frac{\alpha^k n^k}{k!} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto converge, incluso sabemos cuando vale:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k n^{k-1}}{k!} = \frac{e^{\alpha n}}{n} - \frac{1}{n}$$

Finalmente, por criterio M de Weierstrass, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!}$$

converge uniformemente en I , y por tanto lo hace también

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^k(t))_{ij}}{k!}.$$

□

Algunas propiedades de la exponencial de una matriz, son:

Propiedades 4.6.1. Sean $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrices constantes, $t, s \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $e^{0 \cdot t} = I$
2. $e^{A \cdot 0} = I$
3. $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$
4. $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$
5. e^{At} es invertible, y $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
6. $AB = BA \Leftrightarrow B e^{At} = e^{At} B$
7. $AB = BA \Leftrightarrow e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

Demostración. Las propiedades 1) y 2) son directas de la definición.

3) Notamos que en cada intervalo $[-b, b]$, $b \in \mathbb{R}$, las componentes de la matriz At están uniformemente acotadas por $|\max(a_{ij})| |b|$, luego tenemos la convergencia uniforme de $h_p(t) = \sum_{k=0}^p \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!}$, es decir, tenemos la convergencia de la serie de potencias $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!}$, por lo que sabemos que h_p converge uniformemente a h , y la sucesión $h'_p(t) = \sum_{k=1}^p k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$ converge uniformemente en $(-b, b)$ a $\sum_{k=1}^p k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}$ y principalmente que $h(t)$ es derivable y que

$$h'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!}, \quad \forall t \in (-b, b),$$

pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(A^k)_{ij} t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^{k+1})_{ij} t^k}{k!} = (A^k)_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij} t^k}{k!}.$$

En conclusión,

$$\frac{d}{dt} (e^{At})_{ij} = A_{ij} (e^{At})_{ij} \quad \forall t \in (-b, b),$$

y dado que b era arbitrario, se tiene el resultado para todo $t \in \mathbb{R}$.

4) Para cada s fijo, tomamos la función

$$\psi(t) = e^{A(t+s)} - e^{At} e^{As},$$

de este modo

$$\psi(0) = 0$$

y

$$\psi'(t) = A e^{A(t+s)} - A e^{At} e^{As} = A \psi(t)$$

Luego por Teo. de Existencia y Unicidad,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = 0 \Rightarrow \forall t, s \in \mathbb{R} e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}.$$

5) De 4) sabemos que

$$e^{At} e^{-At} = e^{A(t-t)} = I \Rightarrow (e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

6) Por inducción, es fácil ver $AB = BA \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\{0\}, A^k B = BA^k$, pues

$$\begin{aligned} A^k B &= BA^k \quad / \cdot A \\ A^{k+1} B &= ABA^k \quad \text{pero } AB = BA \\ A^{k+1} B &= BAA^k \\ A^{k+1} B &= BA^{k+1}. \end{aligned}$$

Para la otra implicancia basta tomar $k = 1$. Ahora:

$$Be^{At} = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \cdot B = e^{At} B.$$

7) Análogamente a 4) tomamos la función

$$\psi(t) = e^{At} e^{Bt} - e^{(A+B)t},$$

que cumple con

$$\psi(0) = 0,$$

y

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= Ae^{At} e^{Bt} + \underbrace{e^{At} B}_{\text{por 6)}} e^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} \\ &\stackrel{\text{por 6)}}{=} Ae^{At} e^{Bt} + Be^{At} e^{Bt} - (A+B)e^{(A+B)t} \\ &= (A+B)(e^{At} e^{Bt} - e^{(A+B)t}) = (A+B)\psi(t), \end{aligned}$$

es decir, tenemos:

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= (A+B)\psi(t) \\ \psi(0) &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos por Teo. de Existencia y Unicidad, que

$$\forall t \in \mathbb{R} \psi(t) = 0.$$

□

Las propiedades anteriores entregan mucha información sobre las soluciones de sistema lineales a *coeficientes constantes*.

De 2) y 3) vemos que $e^{A(t-t_0)}$ cumple el mismo sistema que la matriz fundamental canónica asociada a t_0 , entonces, por Teo. de Existencia y Unicidad:

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}, \quad \forall t \in I$$

Luego, recordando que en un sistema lineal cualquiera, la solución está dada por:

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds,$$

en términos de la matrix exponencial queda:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

El problema ahora se reduce sólo al cálculo de la matriz exponencial, para esto nos ayudarán las propiedades anteriores, y la forma de la matriz A , en el sentido de si es o no diagonalizable.

4.6.1. Caso diagonalizable

En el caso de que A sea diagonalizable, por ejemplo, en los casos en que A es simétrica ($A^t = A$), antisimétrica ($A^t = -A$), o normal ($AA^t = A^tA$), A se que puede escribir de la forma $A = PDP^{-1}$, con D , matriz diagonal formada por los valores propios de A , y P una matriz que tiene en sus columnas los vectores propios respectivos. De esta forma tenemos, que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A , y v_1, \dots, v_n sus respectivos vectores propios:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad P = (v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n),$$

entonces

$$e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^k t^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} \right) P^{-1} = P e^{Dt} P^{-1},$$

donde

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

De esta forma la solución del sistema homogéneo se puede escribir como:

$$X_h(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 = P e^{Dt} e^{-Dt_0} P^{-1} X_0 = P e^{Dt} C,$$

donde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ es un vector constante que depende de las condiciones iniciales. O bien, desarrollando las matrices, tenemos:

$$\begin{aligned} X_h(t) &= \left(e^{\lambda_1 t} v_1 \mid e^{\lambda_2 t} v_2 \mid \dots \mid e^{\lambda_n t} v_n \right) C \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n. \end{aligned}$$

Para aplicar todo esto, veamos un

Ejemplo 4.6.1 (Confort de un auto). Un modelo para estudiar el confort de un auto está dado por

$$\begin{aligned} x'' &= -(k_1 + k_2)x + (k_1 L_1 - k_2 L_2)\theta \\ \theta'' &= (k_1 L_1 - k_2 L_2)x - (k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2)\theta, \end{aligned}$$

donde las constantes k_1 , k_2 , L_1 y L_2 son respectivamente las rigideces y las distancias de los amortiguadores traseros y delanteros al centro de masas G del auto. En un instante $t > 0$, $x(t)$ representa la posición vertical de G y $\theta(t)$ el giro del auto en torno a G .

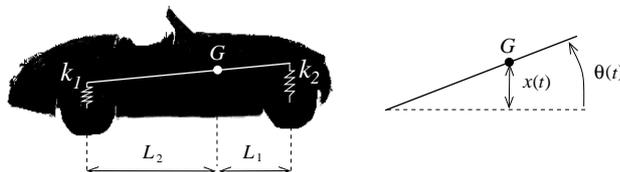


Figura 4.4: Modelamiento de los amortiguadores de un auto del ejemplo 4.6.1

Este sistema de orden 2, lo llevamos a un sistema lineal tomando la variables: x, θ, x', θ' , resultando:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2) & k_1 L_1 - k_2 L_2 & 0 & 0 \\ k_1 L_1 - k_2 L_2 & -(k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue supondremos que $k_2 = \mu k_1$ y $L_1 = \mu L_2$, donde $0 < \mu < 1$, pues generalmente el G de los autos está hacia delante del auto, debido al peso del motor. De esta forma se anulan

los términos de acoplamiento $k_1L_1 - k_2L_2$. Si para simplificar notación llamamos k a k_1 y L a L_2 , resulta el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix}, \text{ donde } a = -(1 + \mu)k \text{ y } b = -\mu(1 + \mu)kL^2.$$

Dado que tenemos la forma $X' = AX$, podemos calcular la exponencial de la matriz. Para esto analicemos cómo son las potencias de A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix};$$

luego, elevando a k :

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix},$$

y si multiplicamos por A , queda:

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo todas las potencias calculadas, procedemos a determinar la matriz exponencial:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \\ a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si tomamos $a = -\alpha^2$ y $b = -\beta^2$, resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\alpha t) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k}}{(2k)!} = \cos(\beta t), \end{aligned}$$

y de la misma manera:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\beta} \sin(\beta t).$$

Por lo tanto:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta t) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \sin(\beta t) \\ -\alpha \sin(\alpha t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta \sin(\beta t) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ponemos alguna condición inicial, como por ejemplo una frenada, representada por:

$$x(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad \theta'(0) = -1,$$

y reemplazamos en la fórmula obtenida para sistema a coeficientes constantes, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \\ -\frac{\sin(\beta t)}{\beta} \\ -\cos(\alpha t) \\ -\cos(\beta t) \end{pmatrix},$$

es decir, la solución del movimiento es:

$$x(t) = \frac{-\sin(\alpha t)}{\alpha}, \quad \theta(t) = \frac{-\sin(\beta t)}{\beta},$$

con $\alpha = \sqrt{(1+\mu)k}$ y $\beta = L\sqrt{\mu(1+\mu)k}$, que físicamente representan la frecuencia de cada modo. Otro método para solucionar este problema es analizar los valores y vectores propios del sistema. Calculemos los valores propios de A

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & b & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - a)(\lambda^2 - b).$$

En términos de las variables antes definidas quedan los valores propios imaginarios puros:

$$\lambda_1 = i\alpha, \quad \lambda_2 = -i\alpha, \quad \lambda_3 = i\beta, \quad \lambda_4 = -i\beta,$$

que tienen asociados respectivamente los vectores propios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego la solución general será:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \\ x' \\ \theta' \end{pmatrix} = c_1 e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o bien,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} &= c_1 e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} -i/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} i/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\beta \end{pmatrix} + c_4 e^{-i\beta t} \begin{pmatrix} 0 \\ i/\beta \end{pmatrix} \\ &= (ic_2 e^{-i\alpha t} - ic_1 e^{i\alpha t}) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + (ic_4 e^{-i\beta t} - ic_3 e^{i\beta t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aquí se ve que el movimiento del sistema se expresa fundamentalmente sólo como el movimiento vertical de G (representado en el vector $(1/\alpha, 0)$ y separadamente la rotación del eje que une los resortes, en torno a G , representado en el vector $(0, 1/\beta)$, y por tanto la solución general del sistema no es más que la combinación lineal de estos dos movimientos fundamentales llamados modos propios. Los valores propios cuando son imaginarios puros, representan la frecuencia natural de cada modo propio, en este caso al modo de movimiento vertical $(1/\alpha, 0)$ tiene asociado la frecuencia propia $w = \alpha$. Una aplicación del conocimiento de este valor es que si se deseara tener un fenómeno de resonancia, bastaría aplicar una fuerza externa sinusoidal sobre el auto con esta misma frecuencia ($F = F_0 \sin(\alpha t)$, F_0 constante). La misma interpretación se tiene para la frecuencia β en el modo $(0, 1/\beta)$. Para comprobar que este método entrega la misma solución que la exponencial de la matriz, impongamos las mismas condiciones iniciales, para determinar las constantes:

$$\begin{aligned} -c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_3 + c_4 &= 0 \\ \frac{-i}{\alpha} c_1 + c_2 \frac{-i}{\alpha} &= -1 \\ \frac{-i}{\beta} c_3 + c_4 \frac{-i}{\beta} &= -1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -\frac{1}{2}$, por tanto:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} (-e^{-i\alpha t} + e^{i\alpha t}) \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} (-e^{-i\beta t} + i e^{i\beta t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta \end{pmatrix};$$

Proposición 4.6.1. Sea λ valor propio de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ de multiplicidad algebraica m . Sea $E_s = \ker(A - \lambda I)^s$, $s \in \mathbb{N}$, entonces existe p , $1 \leq p \leq m$, tal que:

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots E_p = E_{p+1} = E_{p+2} = \cdots .$$

Definición 4.6.3. Los espacios E_s , $1 \leq s \leq p$, de la Proposición (4.6.1) se denominan espacios propios generalizados de A de orden s asociados al valor propio λ .

Un elemento no nulo v tal que $v \in E_s$ y $v \notin E_{s-1}$ se dice vector propio generalizado de A de orden s .

Observación: Con la definición anterior, los vectores propios usuales son vectores propios generalizados de orden 1.

Proposición 4.6.2. v_s es un vector propio generalizado de A de orden s ($s \geq 2$) asociado a λ si y sólo si $v_{s-1} = (A - \lambda I)v_s$ es un vector propio generalizado de A de orden $s - 1$ asociado a λ .

De la proposición (4.6.2) tenemos que si tomamos v_s (vector propio generalizado de orden s), entonces v_{s-1} dado por

$$v_{s-1} = (A - \lambda I)v_s \Leftrightarrow Av_s = \lambda v_s + v_{s-1}$$

es un vector propio generalizado de orden $s - 1$, y así recursivamente tenemos definidos:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= \lambda v_2 + v_1 \\ Av_3 &= \lambda v_3 + v_2 \\ &\vdots \\ Av_s &= \lambda v_s + v_{s-1}, \end{aligned}$$

donde v_1 es el vector propio usual.

Una cadena v_1, v_2, \dots, v_s así construida, se denomina *cadena de Jordan de largo s* , cuando es maximal, es decir, $s = p$ o si $s < p$, entonces el problema

$$(A - \lambda I)v = v_s$$

no tiene solución con v vector propio generalizado de orden $s + 1$.

La cadena también se denomina como cadena asociada al vector propio v_1 .

Proposición 4.6.3. Los elementos de una cadena de Jordan son linealmente independientes.

Proposición 4.6.4. El número k_s de cadenas de Jordan de largo s es

$$k_s = 2l_s - l_{s-1} - l_{s+1},$$

donde $l_s = \dim \ker(A - \lambda I)^s$.

Teorema 4.6.2 (Descomposición de Jordan). Para toda matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, existe una Forma de Jordan J asociada, y una matriz P invertible tal que:

$$A = PJP^{-1}.$$

Además, la matriz J es única, salvo permutaciones de sus bloques.

Observación: Para construir la descomposición se puede proceder de la siguiente manera:

- Se calculan los valores propios de A .
- Se toma un valor propio λ de multiplicidad algebraica m , y se determina la dimensión de los espacios $\ker(A - \lambda I)^s$, aumentando s hasta m .
- Se calculan los k_s , de donde se obtiene un bloque de Jordan de tamaño k_s asociado a cada cadena, y los respectivos valores propios generalizados asociados determinan la matriz P .

Ejemplo 4.6.3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A tiene valores propios $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica 4. De esta forma sabemos que la matriz J estará formada por dos suprabloques, uno asociado a cada valor propio.

Para λ_1 , como tiene multiplicidad 1, sólo le corresponderá un bloque de Jordan de tamaño 1, y tomamos como vector propio asociado $(0, 1, 1, 0, 0)$.

Para λ_2 calculamos:

$$\begin{aligned} l_1 &= \dim \ker(A - I) = 2 \\ l_2 &= \dim \ker(A - I)^2 = 4 \\ l_3 &= \dim \ker(A - I)^3 = 4 \\ l_s &= \dim \ker(A - I)^s = 4, \forall s > 3. \end{aligned}$$

Como $l_0 = 0$, tenemos que $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$, por lo que no hay cadenas de largo 1, pero hay 2 cadenas de largo 2. Cada cadena de largo 2 determina un bloque de 2×2 , por lo que tenemos completamente determinada la matriz J

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para λ_2 tenemos:

$$\begin{aligned}(A - I)v_1 = 0 &\Rightarrow v_1 = (\alpha, \alpha, 0, \beta, \beta) \\ (A - I)v_2 = v_1 &\Rightarrow v_2 = (\beta + \gamma, \gamma, \alpha, \alpha + \delta, \delta).\end{aligned}$$

Si $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow v_1 = (0, 0, 0, 1, 1) \Rightarrow v_2 = (1 + \gamma, \gamma, 0, \delta, \delta)$. Si $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 0, 0, 0, 0)$.
 Si $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow v_1 = (1, 1, 0, 0, 0) \Rightarrow v_2 = (\gamma, \gamma, 1, 1 + \delta, \delta)$. Si $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$.
 De esta forma

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Para el cálculo de e^{At} en el caso general veamos la siguiente propiedad:

Proposición 4.6.5. Sea $M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ diagonal por bloques de la forma

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix},$$

M_i bloque de M , entonces

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Recordemos que las matrices por bloques se pueden multiplicar como si los bloques fueran escalares

$$M^2 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^2 \end{pmatrix}.$$

Luego, por inducción, $M^k = \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^k \end{pmatrix}$, aplicando esto a la matriz exponencial:

$$\begin{aligned} e^M &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_n^k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{M_1^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{M_2^k}{k!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{M_n^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{M_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{M_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Calculemos ahora: $e^{J_i t} = e^{(\lambda_i I_m + N)t}$, donde $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (m es la multiplicidad del

valor propio λ_i).

Claramente $\lambda_i I_m$ y N conmutan, entonces

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i I_m t + Nt} = e^{\lambda_i I_m t} e^{Nt}.$$

Sabemos que $e^{\lambda_i I_m t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$, pero falta conocer propiedades sobre N ; para esto veamos las potencias de N :

$$\begin{aligned}
N^0 &= I \\
N^1 &= N \\
N^2 &= N \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
N^{m-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
N^m &= 0_m.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, N es una matriz nilpotente de orden m , y tenemos que

$$\begin{aligned}
e^{Nt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N^k t^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{N^k}_{=0} \\
&= I + tN + \frac{t^2}{2!} N^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En conclusión, e^{Nt} es una matriz triangular superior de la forma

$$[e^{Nt}]_{ij} = \begin{cases} \frac{t^k}{k!} & \text{si } j - i = k \geq 0 \\ 0 & \text{si } j - i < 0 \end{cases}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 e^{J_i t} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

De esta forma hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 4.6.6. *Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, y su descomposición en forma canónica de Jordan $A = PJP^{-1}$, entonces:*

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{J_n t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Ejemplo 4.6.4. Consideremos el sistema:

$$X' = AX,$$

con condición inicial $X(0) = X_0$, donde la matriz A está dada en el ejemplo (4.6.3). Luego como ya habíamos calculado su descomposición canónica de Jordan, se tendrá en virtud de la proposición anterior que la solución es:

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0,$$

con P descrita en ejemplo (4.6.3).

□

Ejemplo 4.6.5 (Equilibrio Marino). Suponga que la población de ballenas b , plancton p y temperatura del mar T están regidas por el siguiente sistema discreto, donde n designa el año y

$\lambda > 0$ es un parámetro de crecimiento:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \lambda b_n + p_n \\ p_{n+1} &= \lambda p_n + T_n \\ T_{n+1} &= \lambda T_n, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales b_0, p_0, T_0 constantes positivas.

Se quiere saber cómo evoluciona este sistema en el tiempo, dependiendo del parámetro λ . Para esto, escribamos el sistema anterior se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ p_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ p_n \\ T_n \end{pmatrix}, \text{ con condición inicial } \begin{pmatrix} b_0 \\ p_0 \\ T_0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos primero un caso más general de sistemas discretos:

$$X_{n+1} = AX_n + B_n, \quad n \geq 0,$$

con condición inicial $X_0 \in \mathbb{R}^d$, donde $A \in M_{d \times d}(\mathbb{R})$, $B_n \in \mathbb{R}^d$, $n \geq 0$. Como X_0 es la condición inicial, iterando tenemos:

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 + B_0 \\ X_2 &= AX_1 + B_1 = A(AX_0 + B_0) + B_1 = A^2X_0 + AB_0 + B_1 \\ X_3 &= AX_2 + B_2 = A^3X_0 + A^2B_0 + AB_1 + B_2 \\ &\vdots \\ X_n &= A^n X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j} B_{j-1}. \end{aligned}$$

Probemos por inducción que efectivamente la solución del sistema está dada por:

$$X_n = A^n X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j} B_{j-1}, \quad n \geq 1$$

Para $n = 1$, resulta

$$X_1 = AX_0 + B_0,$$

que es solución del sistema. Suponemos ahora que $X_n = A^n X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j} B_{j-1}$ satisface el sistema propuesto, entonces hay que probar que

$$X_{n+1} = A^{n+1} X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j} B_{j-1}$$

también lo satisface. En efecto,

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} A^{n+1-j}B_{j-1} \\
 &= A^{n+1}X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n+1-j}B_{j-1} + A^{n+1-(n+1)}B_{(n+1)-1} \\
 &= A^{n+1}X_0 + A \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1} + I_{d \times d}B_n \\
 &= A \left(A^n X_0 + \sum_{j=1}^n A^{n-j}B_{j-1} \right) + B_n, \text{ usando la hipótesis de inducción} \\
 &= AX_n + B_n.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, X_{n+1} satisface el sistema.

Estudiemos ahora la solución del sistema discreto homogéneo, para el caso en que A sea diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$, con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}, \text{ donde } \lambda_1, \dots, \lambda_d \text{ son los valores propios de } A.$$

Según lo anterior, la solución de este sistema será: $X_n = A^n X_0$, pero $A^n = PD^nP^{-1}$, entonces:

$$X_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_d^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

De esta forma si queremos que nuestro problema tenga solución, es decir que exista $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, debemos imponer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^n$ exista $\forall k = 1, \dots, d$, lo que equivale a pedir que $|\lambda_k| < 1, \forall k = 1, \dots, d$.

Si volvemos al problema específico de las ballenas, estamos en el caso de un sistema homogéneo discreto, pero donde la matriz A no es diagonalizable (tiene la forma de un bloque de Jordan), sin embargo, sigue siendo válida la solución $X_n = A^n X_0$, entonces sólo resta calcular A^n . Para esto usaremos la siguiente propiedad:

$$AB = BA \Rightarrow (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}, \forall n \geq 0,$$

es decir, si las matrices conmutan, se tiene la propiedad del Binomio de Newton, y la demostración de esto es idéntica a la del Binomio original (por inducción). En este caso podemos usar esta fórmula, pues claramente

$$\lambda I_d N = \lambda N = N \lambda = N \lambda I_d.$$

Luego:

$$A^n = (\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k I^k N^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k},$$

con N una matriz nilpotente de orden 3, pero $N^{n-k} = 0$ cuando $n - k \geq 3 \Rightarrow n - 3 \geq k$, luego la suma sin los términos nulos queda:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=n-2}^n \binom{n}{k} \lambda^k N^{n-k} \\ &= \binom{n}{n-2} \lambda^{n-2} N^2 + \binom{n}{n-1} \lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n \lambda^{n-1} N + \lambda^n. \end{aligned}$$

En el desarrollo sobre las formas de Jordan, habíamos calculado todas las potencias de una matriz nilpotente, resulta entonces:

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + n \lambda^{n-1} N + \binom{n}{n} \lambda^n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda^n \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & n \lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma vemos que se repite la solución que teníamos para el caso diagonalizable: independiente de la condiciones iniciales, nuestro modelo indica que cuando $n \rightarrow \infty$, si $|\lambda| > 1$, el sistema diverge, es decir las poblaciones de ballenas y plancton se expanden indefinidamente, al igual que la temperatura, mientras que si $|\lambda| < 1$, las poblaciones se extinguen y la temperatura del mar desciende a 0. En el caso crítico $|\lambda| = 1$ se tiene que las poblaciones animales divergen, pero con temperatura constante del mar T_0 . \square

Capítulo 5

Ecuaciones Diferenciales No Lineales

5.1. Introducción

Muchos fenómenos de la naturaleza se comportan de forma un poco más complicada que un sistema de ecuaciones lineales. Por ejemplo, se suele utilizar la aproximación de la Ley de Hooke $F = -kx$ para modelar resortes, aunque en realidad esta fuerza suele tener otras componentes de orden no lineal, pero que habitualmente son despreciables. En general estas ecuaciones presentan grandes desafíos, pues es bastante complicado encontrarles soluciones explícitas; sin embargo, muchas veces se puede hacer un estudio cualitativo de las soluciones, que nos indique sobre el comportamiento general del sistema no lineal.

Definición 5.1.1. Dado I un intervalo abierto no vacío, y una función $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se define un sistema de ecuaciones diferenciable de primer orden con condición inicial $X_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t_0 \in I$, por:

$$\begin{aligned} X' &= F(t, X), \quad t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

Si la función F es no lineal con respecto a la variable X , se dirá que es un sistema no lineal (SNL). Si además F no depende explícitamente de la variable t , se dirá que es un sistema no lineal autónomo (SNLA).

Se llama vector de estado a $X(t) \in \mathbb{R}^n$, que es la solución del sistema en un punto $t \in I$.

Observación. Dada una función $h : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, toda ecuación de orden superior de la forma:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{aligned}$$

se puede llevar mediante un cambio de variables a la forma (SNL). Asimismo si h no depende explícitamente de t , se puede llevar a la forma (SNLA).

Observación. Un (SNLA) corresponde en el caso mecánico a un movimiento sin forzamiento externo. Además, en el caso que los coeficientes sean constantes, es invariante bajo traslaciones temporales (variable t).

Ejemplo 5.1.1 (El péndulo simple amortiguado). Un péndulo simple sometido a un ambiente con roce (por ejemplo aire, agua, aceite, etc.) y a una fuerza externa, que queda descrito por la ecuación de movimiento de segundo orden:

$$\begin{aligned} m\theta'' + c\theta' + \frac{mg}{L}\sin(\theta) - f(t) &= 0 \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ \theta'(0) &= \theta'_0, \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical y c el coeficiente de roce, producto de una fuerza de roce viscoso lineal $\vec{F}_{roce} = -c\vec{v}$, donde $v = L\theta'$. Haciendo el cambio de variables: $x = \theta$, $y = \theta'$, la ecuación anterior toma la forma de (SNL):

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x) + f(t). \end{aligned}$$

La no linealidad se aprecia claramente en el término no lineal $\sin(\theta)$:

$$\sin(\lambda\theta_1 + \theta_2) \neq \lambda\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2).$$

El (SNLA) del péndulo corresponde al caso en que no hay forzamiento externo:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.1.2 (Atractor de Lorenz). El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales fue un modelo desarrollado por Lorenz, que en principio se proponía tratar de comprender los fenómenos meteorológicos. El modelo atmosférico que utilizó Lorenz consiste en una atmósfera bidimensional rectangular, cuyo extremo inferior está a una temperatura mayor que el superior. De esta manera el aire caliente subirá y el aire frío bajará creándose corrientes que harán un intercambio de calor por convección. Las ecuaciones que describen este proceso son:

$$\begin{aligned} x'(t) &= s(y - x) \\ y'(t) &= rx - y - xz \\ z'(t) &= xy - bz, \end{aligned}$$

donde las variables son: x que representa el flujo convectivo; y , la distribución horizontal de temperaturas; y z la distribución vertical de temperaturas. Además, tenemos tres parámetros que intervienen en las ecuaciones: s es el cociente entre la viscosidad y la conductividad térmica; r , la diferencia de temperaturas entre la capas inferior y superior; y b el cociente entre la altura y el ancho del rectángulo. Este es un modelo muy importante que tiene muchas cosas interesantes, pero por ahora sólo notamos que es un sistema autónomo, pero no lineal, pues aparece el término xy . □

5.2. Existencia y Unicidad

Al igual que todo tipo de ecuaciones diferenciales, siempre es interesante saber cuándo existen las soluciones de los problemas analizados. En el caso de ecuaciones no lineales tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.2.1 (Existencia y unicidad local en tiempo). *Dado un (SNL), si existe $\delta > 0$ tal que $I_0 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq \delta\} \subseteq I$, y existe $r > 0$ tal que $F(\cdot, X)$ es continua (en t) $\forall |t - t_0| \leq \delta$, $\forall |X - X_0| \leq r$. Si además existe una constante real $L > 0$ (constante de Lipshitz) tal que:*

$$|F(t, X) - F(t, Y)| \leq L|X - Y|, \quad \forall |X - X_0| \leq r, \forall |Y - X_0| \leq r, \forall |t - t_0| \leq \delta.$$

Entonces existen $M > 0$ y $\bar{\delta} = \min\{\delta, r/M\}$, tal que existe una única solución del (SNL) $X(\cdot) : [t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}] \rightarrow \mathbb{R}^n$, que resulta ser continuamente derivable en $]t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}[$.

Demostración. Esencialmente esta demostración es análoga a la realizada para el teorema de existencia y unicidad para el caso de sistemas lineales, por lo que se usarán las mismas notaciones entonces definidas.

Puesto que F es Lipshitz en X , se tiene la continuidad de esta función en X , y como por hipótesis es continua en t , se tiene que en el compacto $I \times B(X_0, r)$ ($B(X_0, r)$ denota la bola de centro X_0 y radio r en norma euclidiana) alcanza su máximo:

$$\max_{\substack{|t-t_0| \leq \delta \\ |X-X_0| \leq r}} |F(t, X)| = M.$$

Como antes, el sistema a resolver es equivalente a:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds,$$

por lo que nuestro problema se vuelve a plantear como encontrar un punto fijo de la aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{C}([t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}], \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}([t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}], \mathbb{R}^n) \\ X &\rightarrow \Psi(X), \end{aligned}$$

donde $\Psi(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds, \forall t \in [t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}]$.

Sin embargo, para tener todas las condiciones del teorema del punto fijo de Banach, introduciremos la norma

$$\|X\|_L = \sup_{|t-t_0| \leq \bar{\delta}} \{e^{-2L|t-t_0|} |X(t)|\}.$$

Consideremos el espacio:

$$B = \{X \in \mathcal{C}([t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}], \mathbb{R}^n) \mid \sup_{|t-t_0| \leq \bar{\delta}} |X(t) - X_0| \leq r\}.$$

Veamos que $\Psi(B) \subseteq B$. En efecto, sea $X \in B$:

$$|\Psi(X)(t) - X_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |F(s, X(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\bar{\delta} \leq r,$$

entonces

$$\sup_{|t-t_0| \leq \bar{\delta}} |\Psi(X)(t) - X_0| \leq r,$$

es decir, $\Psi(X) \in B$.

Ahora veamos que la aplicación restringida a este espacio $\Psi : B \rightarrow B$ es contractante, considerando el espacio B con la norma $\|\cdot\|_L$. En efecto, sean $X_1, X_2 \in B$

$$\begin{aligned} e^{-2L|t-t_0|} |\Psi(X_1)(t) - \Psi(X_2)(t)| &\leq e^{-2L|t-t_0|} \left| \int_{t_0}^t |F(s, X_1(s)) - F(s, X_2(s))| ds \right| \\ &\leq e^{-2L|t-t_0|} L \left| \int_{t_0}^t |X_1(s) - X_2(s)| ds \right| \\ &= e^{-2L|t-t_0|} L \left| \int_{t_0}^t |X_1(s) - X_2(s)| e^{-2L|s-t_0|} e^{2L|s-t_0|} ds \right| \\ &\leq e^{-2L|t-t_0|} L \|X_1 - X_2\|_L \left| \int_{t_0}^t e^{2L|s-t_0|} ds \right| \\ &= L \|X_1 - X_2\|_L e^{-2L|t-t_0|} \frac{e^{2L|t-t_0|} - 1}{2L} \\ &\leq \frac{1}{2} \|X_1 - X_2\|_L. \end{aligned}$$

Como el espacio B con la norma $\|\cdot\|_L$ es un Banach, concluimos por el teorema de punto fijo de Banach, que existe un único punto fijo de la aplicación estudiada, o equivalente existe una única solución del problema (SNL) $X(\cdot) \in \mathcal{C}([t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}], \mathbb{R}^n)$, que resulta ser continuamente diferenciable sobre el intervalo abierto. \square

Muchas veces se tiene una condición mas fuerte que la de Lipschitz, se tiene diferenciabilidad, por lo que resulta de utilidad el siguiente corolario.

Corolario 5.2.1. *Dado un (SNL), si existe $\delta > 0$ tal que $I_0 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq \delta\} \subseteq I$, y existe $r > 0$ tal que $F(\cdot, X)$ es continua (en t) $\forall |t - t_0| \leq \delta, \forall |X - X_0| \leq r$. Si además para cada $|t - t_0| \leq \delta$, la función es continuamente diferenciable con respecto a la variable $X, \forall |X - X_0| \leq r$. Entonces existen $M > 0$ y $\bar{\delta} = \min\{\delta, r/M\}$, tal que existe una única solución del (SNL) $X(\cdot) : [t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}] \rightarrow \mathbb{R}^n$, que resulta ser continuamente derivable en $]t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}[$.*

Demostración. Basta notar que por teorema del valor medio (o de los incrementos finitos), se tiene que si definimos para cada t :

$$\begin{aligned} F_t : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow F(t, x), \end{aligned}$$

entonces:

$$|F_t(Z) - F_t(Y)| \leq \sup_{|X - X_0| \leq r} \|JF_t(X)\| |Z - Y|.$$

Pero

$$\sup_{|X - X_0| \leq r} \|JF_t(X)\| |Z - Y| \leq \sup_{|X - X_0| \leq r, |t - t_0| \leq \delta} \|JF_t(X)\| |Z - Y|,$$

y como además $JF_t(\cdot)$ es una función continua de X , y como F era continua en t , entonces $JF_t(X)$ es continua en t y X sobre un compacto, por lo tanto se alcanza el máximo, que denotamos por L . Por lo tanto:

$$|F(t, Z) - F(t, Y)| \leq L|Z - Y|, \quad \forall |t - t_0| \leq \delta, \forall |Z - X_0| \leq r, \forall |Y - X_0| \leq r.$$

Concluimos que F satisface la condición de Lipshtiz, y por tanto se puede aplicar el teorema anterior. \square

Observación. El teorema anterior asegura solamente la existencia de una solución local, en una vecindad centrada de t_0 , que no depende del valor de la constante de Lipshtiz.

Ejemplo 5.2.1. Veamos la siguiente ecuación no lineal definida en todo \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} y' &= -y^2 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Claramente cumple todas las hipótesis del teorema en todo subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pues si tomamos la bola $B(y_0, r) \subseteq \mathbb{R}$, para algún $r > 0$:

$$|-y_1^2 + y_2^2| = |y_2 - y_1||y_2 + y_1| \leq L|y_2 - y_1|,$$

con $L = 2|y_0| + 2r$, y

$$\max_{|y - y_0| \leq r} |y^2| = (|y_0| + r)^2.$$

Luego $\bar{\delta} = \frac{r}{(|y_0| + r)^2}$. Es fácil ver mediante derivación que la función $\bar{\delta}(r) = \frac{r}{(|y_0| + r)^2}$, alcanza su máximo en $r = |y_0|$, por lo que $\bar{\delta} \leq \frac{1}{4|y_0|}$. Eligiendo el r señalado, tenemos que en el mejor de los casos el teorema de existencia y unicidad nos garantiza una única solución definida en el intervalo $[t_0 - \frac{1}{4|y_0|}, t_0 + \frac{1}{4|y_0|}]$. Sin embargo, por métodos usuales para este tipo de ecuaciones, podemos calcular explícitamente que la solución está dada por:

$$y(t) = \frac{1}{t - t_0 + \frac{1}{y_0}},$$

donde vemos que el intervalo maximal (i.e. el mayor de los intervalos con el orden de la inclusión de conjuntos) donde es posible definir la solución es $(t_0 - \frac{1}{y_0}, \infty)$, si $y_0 > 0$, y $(-\infty, t_0 - \frac{1}{y_0})$, si $y_0 < 0$. Pese a esto, tenemos que aunque el problema está bien definido en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es imposible tener una única solución definida en todo \mathbb{R} .

Nota. De aquí en adelante nos restringiremos a problemas en dos dimensiones y autónomos de la forma (SNLA):

$$\begin{aligned}x' &= F(x, y), \quad x(t_0) = x_0 \\y' &= G(x, y), \quad y(t_0) = y_0,\end{aligned}$$

con F y G funciones continuamente diferenciables, por lo que por teorema de existencia y unicidad siempre tendremos una única solución local.

5.3. Sistemas Cuasilineales

Definición 5.3.1. Se llama punto crítico (o punto de equilibrio) de un sistema al punto (\bar{x}, \bar{y}) cuando cumple que:

$$\begin{aligned}F(\bar{x}, \bar{y}) &= 0 \\G(\bar{x}, \bar{y}) &= 0.\end{aligned}$$

El conjunto de puntos críticos del sistema se denota por

$$\mathcal{C} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

Un punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) se dice aislado si existe $\delta > 0$ tal no existe otro punto crítico en la bola

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 < \delta^2\},$$

de lo contrario se dice que los puntos críticos son densos en torno a (\bar{x}, \bar{y}) .

Si hacemos una expansión de Taylor en el (SNLA) en torno a un punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) , resulta:

$$\begin{aligned}F(x, y) &= F(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + f_F(r) \\G(x, y) &= G(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + h_G(r),\end{aligned}$$

donde $r = (x, y) - (\bar{x}, \bar{y})$, y

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_F(r)}{\|r\|} &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_G(r)}{\|r\|} &= 0.\end{aligned}$$

Como además (\bar{x}, \bar{y}) es un punto crítico, entonces $F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. También hay que notar que las derivadas parciales están evaluadas en el punto crítico, por lo que representan constantes, que denotaremos por:

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}), \quad c = \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Ahora, si reemplazamos en (SNLA) queda:

$$(SNLA) \begin{cases} x' = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + h_F(r) \\ y' = c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) + h_G(r). \end{cases}$$

Notamos que en este sistema,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = J(\bar{x}, \bar{y}),$$

donde notación J viene la matriz Jacobiana de la función:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow & \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix} \end{array}$$

evaluada en el punto crítico asociado (\bar{x}, \bar{y}) . La linealización del (SNLA) corresponde al sistema linealizado (SL):

$$(SL) \begin{cases} x' = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) \\ y' = c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) \end{cases}$$

Si repetimos este procedimiento para cada punto crítico aislado (\bar{x}_i, \bar{y}_i) , $i = 1, \dots, m$, tenemos:

$$(SL)_i \begin{cases} x' = a_i(x - \bar{x}_i) + b_i(y - \bar{y}_i) \\ y' = c_i(x - \bar{x}_i) + d_i(y - \bar{y}_i) \end{cases},$$

donde:

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \end{pmatrix} = J(\bar{x}_i, \bar{y}_i).$$

Definición 5.3.2. Un sistema (SNLA) se dirá cuasilineal en torno a (\bar{x}, \bar{y}) si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$.

Propiedades 5.3.1. Dado un (SNLA), y (\bar{x}, \bar{y}) un punto crítico de este sistema:

- (i) Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces (\bar{x}, \bar{y}) es el único punto crítico del (SL), donde resulta ser aislado.
- (ii) Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$, entonces los puntos críticos del (SL) son densos. Más aún, su lugar geométrico es una recta (que contiene a (\bar{x}, \bar{y})) si algún coeficiente del Jacobiano es distinto de cero, y es todo el plano en caso de que el Jacobiano tenga todo sus términos nulos.
- (iii) Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces (\bar{x}, \bar{y}) es un punto crítico aislado del (SNLA).

Demostración. (i) Para encontrar los puntos críticos del (SL) basta resolver:

$$a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) = 0 \quad (5.1)$$

$$c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) = 0, \quad (5.2)$$

de donde:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Por tanto si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces podemos invertir, y se tiene que existe una única solución del sistema $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$, y por ser la única, es punto aislado.

(ii) De lo anterior tenemos que los puntos críticos están dados por:

$$ax + by = a\bar{x} + b\bar{y}$$

$$cx + dy = c\bar{x} + d\bar{y}.$$

Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$, i.e. $ad - bc = 0$, o equivalentemente $ad = bc$ siempre tendremos infinitas soluciones, basta multiplicar (5.1) por d , (5.2) por b , y se obtiene:

$$adx + bdy = ad\bar{x} + bd\bar{y}$$

$$bcx + bdy = bc\bar{x} + bd\bar{y},$$

es decir, son la misma ecuación. Luego la solución es el lugar geométrico:

$$adx + bdy - ad\bar{x} - bd\bar{y} = 0.$$

En el caso $a \neq 0$ o $b \neq 0$, lo anterior no es más que una recta que contiene al punto crítico en torno al cual se linealiza, por lo que siempre dejará de ser aislado.

En el caso $a = b = 0$, se obtiene todo el plano \mathbb{R}^2 , donde ningún punto es aislado.

(iii) Por contradicción, supongamos que para todo $\delta > 0$ existe otro punto crítico del $(SNLA)$ (\bar{w}, \bar{z}) tal que $|(\bar{x}, \bar{y}) - (\bar{w}, \bar{z})| < \delta$. Luego por definición de punto crítico se tiene que:

$$a(\bar{w} - \bar{x}) + b(\bar{z} - \bar{y}) + h_F(\bar{r}) = 0$$

$$c(\bar{w} - \bar{x}) + d(\bar{z} - \bar{y}) + h_G(\bar{r}) = 0,$$

donde $\bar{r} = (\bar{w}, \bar{z}) - (\bar{x}, \bar{y})$. Equivalentemente se tiene:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w} - \bar{x} \\ \bar{z} - \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}.$$

Usando que $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, tenemos:

$$\begin{pmatrix} \bar{w} - \bar{x} \\ \bar{z} - \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}.$$

Tomando norma y acotando, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\bar{r}\| &\leq \|J(\bar{x}, \bar{y})^{-1}\| \sqrt{h_F(\bar{r})^2 + h_F(\bar{r})^2} \\ 1 &\leq \|J(\bar{x}, \bar{y})^{-1}\| \sqrt{\left(\frac{h_F(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{h_F(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Y como el lado derecho tiende a cero cuando $\bar{r} \rightarrow 0$, se tiene una contradicción. □

Ejemplo 5.3.1 (Conejos y ovejas). Supongamos un modelo para la competencia de dos poblaciones de animales: conejos x y ovejas y , que luchan por el pasto en un habitat reducido:

$$\begin{aligned} x' &= 60x - 3x^2 - 4xy \\ y' &= 42y - 3y^2 - 2xy. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de este sistema se encuentran resolviendo:

$$\begin{aligned} 60x - 3x^2 - 4xy &= 0 = x(60 - 3x - 4y) = 0 \\ 42y - 3y^2 - 2xy &= y(42 - 3y - 2x) = 0. \end{aligned}$$

Luego tenemos varios casos.

- Si $x = 0$ entonces $y = 0$ o $42 - 3y - 2x = 0$, de donde obtenemos los puntos: $(0, 0)$ y $(0, 14)$.
- Si $y = 0$ entonces $x = 0$ o $60 - 3x - 4y = 0$, de donde obtenemos los puntos: $(0, 0)$ y $(20, 0)$.
- Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, entonces resolvemos

$$\begin{aligned} 60 - 3x - 4y &= 0 \\ 42 - 3y - 2x &= 0, \end{aligned}$$

de donde se tiene $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 6)$.

Por tanto, $\mathcal{C} = \{(0, 0), (0, 14), (20, 0), (12, 6)\}$.

El conjunto anterior muestra los casos de equilibrios entre ambas poblaciones. El único caso en que pueden existir ambas especies es $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 6)$, en el resto, por lo menos una de las especies se extingue, pero aún así todas son soluciones de equilibrio. El Jacobiano en este caso está dado por:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 - 6x - 4y & -4x \\ -2y & 42 - 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

Se evalúa ahora el Jacobiano en cada punto crítico, para tener el sistema linealizado respectivo:

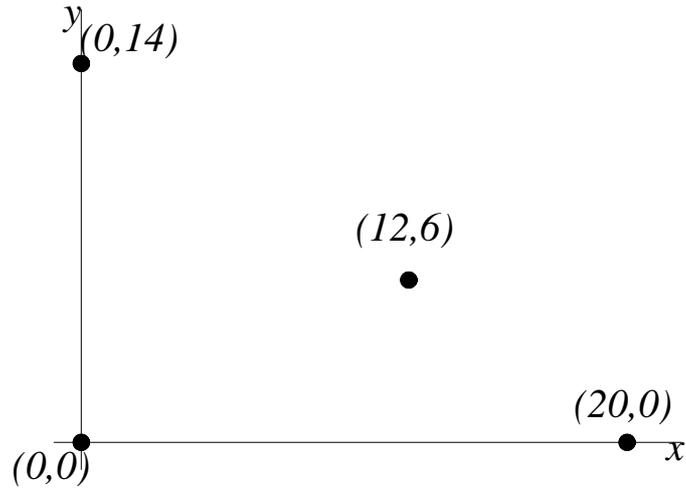


Figura 5.1: Soluciones de equilibrio para el modelo de conejos y ovejas

(i) $J(0,0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$ que es invertible: $ad - bc = 60 \cdot 42 \neq 0$, y

$$(SL)_1 \begin{cases} x' = 60(x - 0) + 0(y - 0) = 60x \\ y' = 0(x - 0) + 42(y - 0) = 42y \end{cases}$$

(ii) $J(20,0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que es invertible: $ad - bc = -60 \cdot 2 \neq 0$, y

$$(SL)_2 \begin{cases} x' = -60(x - 20) - 80(y - 0) \\ y' = 0(x - 20) + 2(y - 0) = 2y \end{cases}$$

(iii) $J(0,14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$ que es invertible: $ad - bc = -42 \cdot 4 \neq 0$, y

$$(SL)_3 \begin{cases} x' = 4x \\ y' = -28x - 42(y - 14) \end{cases}$$

(iv) $J(12,6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$ que es invertible: $ad - bc = (-36)(-42) - (-12)(-48) = 72 \neq 0$, y

$$(SL)_4 \begin{cases} x' = -36(x - 12) - 48(y - 6) \\ y' = -12(x - 12) - 18(y - 6) \end{cases}$$

Finalmente concluimos que el modelo de conejos y ovejas es cuasilineal en torno a todos sus puntos críticos. □

Ejemplo 5.3.2. Habíamos visto que las ecuaciones de un péndulo sin forzamiento están dadas por :

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x),\end{aligned}$$

cuyos puntos críticos satisfacen:

$$\begin{aligned}0 &= \bar{y} \\0 &= -\frac{c}{m}\bar{y} - \frac{g}{L}\sin(\bar{x}),\end{aligned}$$

entonces

$$\bar{y} = 0, \sin(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Así:

$$\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

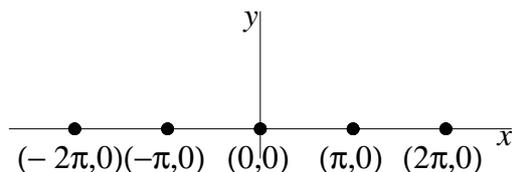


Figura 5.2: Soluciones de equilibrio del péndulo no lineal

El Jacobiano respectivo es:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x) & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

que es invertible.

En el caso del péndulo linealizado en torno a cero:

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}x,\end{aligned}$$

su único punto crítico es $(0, 0)$, es decir

$$\mathcal{C} = \{(0, 0)\}.$$

□

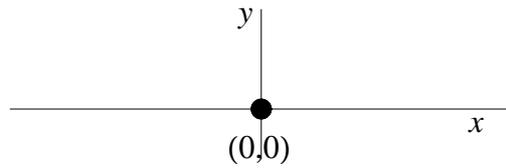


Figura 5.3: Soluciones de equilibrio del péndulo linealizado en torno al origen

Ejemplo 5.3.3. Consideremos el sistema autónomo definido para todo $t \in \mathbb{R}$ por:

$$\begin{cases} x' = x^3 \\ y' = y^3 \end{cases},$$

que tiene el punto crítico aislado $(0, 0)$, y

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que no este sistema no es cuasilineal en torno al $(0, 0)$. Si intentamos hacer la linealización en torno a $(0, 0)$ queda:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases},$$

cuyos puntos críticos son $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$, como efectivamente lo asegura la propiedad (ii) de (5.3.1). \square

Ejemplo 5.3.4. Se tiene el (SNLA)

$$\begin{cases} x' = 3x + x^2 + 2y + y^2 \\ y' = 6x - x^2 + 4y + y^2 \end{cases}.$$

Claramente el punto $(0, 0)$ es un punto crítico. Para ver que es el único (y por tanto es aislado), se puede tratar de resolver explícitamente el sistema, pero esto resulta un poco engorroso. Otra forma es bosquejar un gráfico, dado que cada ecuación no es más que una cónica. Si se completan cuadrados, queda:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 &= \frac{13}{4} \\ -(x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= -5 \end{aligned}$$

que corresponden a una circunferencia y una hipérbola respectivamente. El bosquejo del gráfico se puede ver en la Figura 5.4.

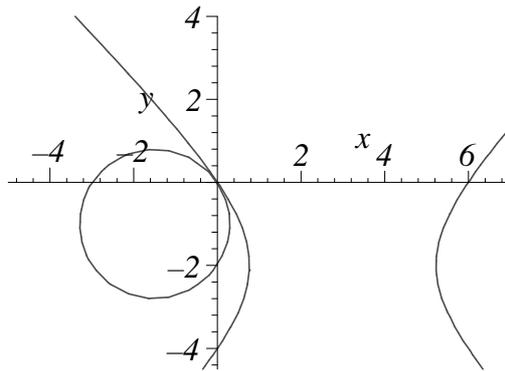


Figura 5.4: Intersección de Cónicas

Para ver que en $(0, 0)$ la dos curvas efectivamente son tangentes como lo sugiere el gráfico, calculemos la derivada en dicho punto

$$3 + 2x + 2y' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3 + 2x}{2(1 + y)} \Rightarrow y'(0) = -\frac{3}{2}$$

$$6 - 2x + 4y' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x - 3}{2 + y} \Rightarrow y'(0) = -\frac{3}{2}.$$

La matriz jacobiana está dada por:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3 + 2x & 2 + 2y \\ 6 - 2x & 4 + 2y \end{pmatrix} \Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J(0, 0)) = 0,$$

por lo que no es cuasilineal, y el (SL) en torno a $(0, 0)$ es:

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y \\ y' &= 6x + 4y, \end{aligned}$$

cuyos puntos críticos estarán dados por:

$$\begin{cases} 3\bar{x} + 2\bar{y} = 0 \\ 6\bar{x} + 4\bar{y} = 0 \end{cases}.$$

Claramente estas ecuaciones son linealmente dependientes, y la solución es el conjunto: $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{3}{2}x\}$, es decir, una recta que pasa por el origen, donde el punto $(0, 0)$ no es aislado, tal como lo señalaba también la propiedad (ii) de (5.3.1). \square

5.4. Diagramas de Fase

Para el estudio de las ecuaciones diferenciales de dos variables x, y resulta de mucho interés lo que ocurre en el plano XY , llamado *plano de fase*.

Definición 5.4.1. Dado el sistema (lineal o no lineal) autónomo, $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned}x'(t) &= F(x, y) \\y'(t) &= G(x, y),\end{aligned}$$

dada una condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, $t_0 \in I$, se llama trayectoria que parte de (x_0, y_0) , a la función \mathcal{T} :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}: I_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\t &\longrightarrow (x(t), y(t)),\end{aligned}$$

donde I_0 es un intervalo de existencia que contiene al que entrega el teorema de existencia y unicidad. Se llama recorrido \mathcal{R} de esta trayectoria al conjunto imagen o recorrido de la función \mathcal{T} , es decir:

$$\mathcal{R} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I_0\}.$$

Se denomina diagrama de fases de este sistema autónomo a una colección de recorridos de las trayectorias para un número representativo de condiciones iniciales.

Se define como nullclina de x al conjunto $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$, y nullclina de y al conjunto $\{(x, y) \mid G(x, y) = 0\}$.

Definición 5.4.2. El diagrama de flujo se construye al graficar en una colección de puntos (x, y) representativos el vector $(F(x, y), G(x, y))$

Con respecto al diagrama de flujo, notemos que por regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt},$$

entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}.$$

Por tanto el recorrido de la trayectoria es tangente al flujo.

Además, con respecto a las diferentes naturalezas que pueden tener los puntos críticos, se tienen las siguientes definiciones.

Definición 5.4.3. Un punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) se dice estable si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \{(\forall (x_0, y_0)) \|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta \Rightarrow \|(x(t), y(t)) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \varepsilon, \forall t > t_0\}.$$

Un punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) se dice asintóticamente estable si es estable y

$$(\exists \delta > 0) \left\{ (\forall x_0, y_0) \|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y}) \right\}.$$

Un punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) que no es estable se dice inestable.

La estabilidad de un punto crítico quiere decir que la evolución del sistema se mantiene arbitrariamente cerca del punto crítico, si las condiciones iniciales se toman suficientemente cerca del punto.

Observación. Un punto asintóticamente estable es estable, pero un punto estable no es necesariamente asintóticamente estable.

Ejemplo 5.4.1. Consideremos el sistema:

$$x' = -x \tag{5.3}$$

$$y' = -ky, \tag{5.4}$$

donde k es una constante no nula, con condiciones iniciales: $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, que tiene como solución:

$$x(t) = x_0 e^{-t} \tag{5.5}$$

$$y(t) = y_0 e^{-kt}, \tag{5.6}$$

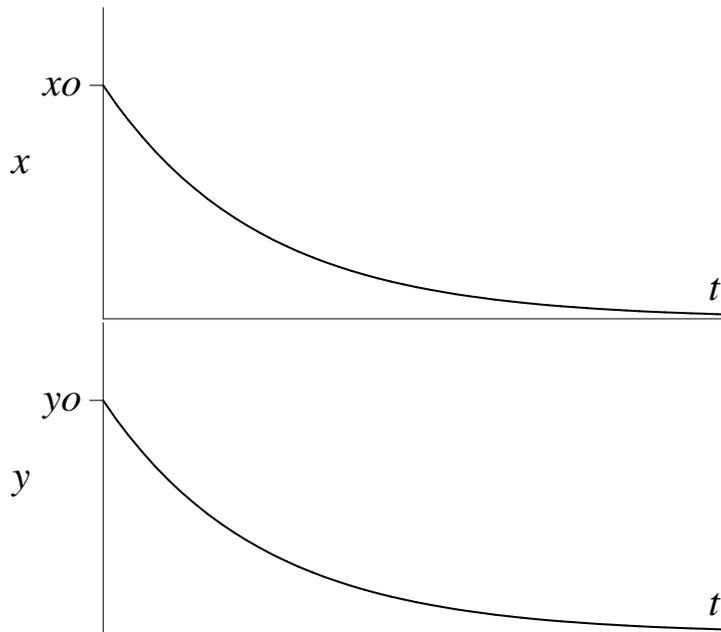


Figura 5.5: Soluciones (5.5) y (5.6) para $k > 0$

Así tenemos una solución $(x(t), y(t))$ que depende de (x_0, y_0) . Consideramos $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$, pues en el caso que alguna de las condiciones iniciales es nula, esto conduce a la solución idénticamente nula en esa variable, por Teo. de Existencia y Unicidad. Para distintos valores de k , esta solución tiene distintas formas. Si tomamos $k = 1$, resultan las soluciones:

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$

$$y(t) = y_0 e^{-t}$$

Dividiendo las ecuaciones:

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{x_0}x(t),$$

que representan rectas de pendiente $\frac{y_0}{x_0}$, cuyo gráfico en el plano XY queda ilustrado en la figura 5.6, donde las flechas indican el sentido positivo del tiempo, es decir, tenemos:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{cases} .$$

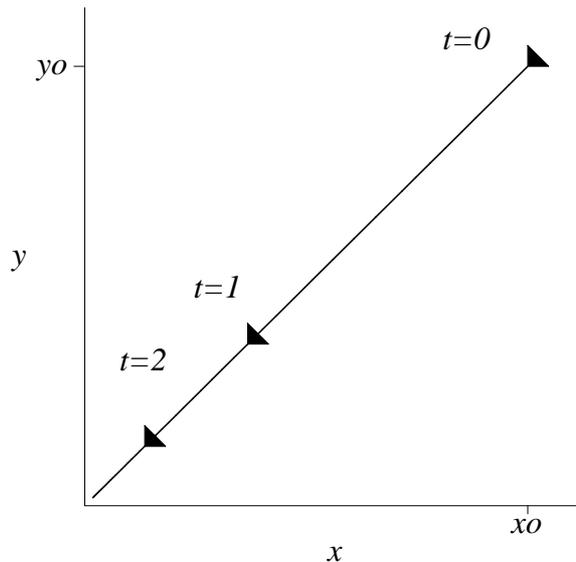


Figura 5.6: Solución del sistema para una condición inicial en el plano de fases XY

La idea de un diagrama de fases es dar una representación de trayectorias dirigidas en el sentido positivo del tiempo en el plano de fases para distintas condiciones iniciales, que se puede obtener al eliminar el tiempo de las ecuaciones.

Entonces tratemos ahora de considerar un rango más amplio de condiciones iniciales, con valores positivos y negativos de x_0 y de y_0 . Finalmente resulta el diagrama de fase de la figura 5.7, donde se aprecia claramente que el punto $(0, 0)$ tiene la particularidad de que sin importar la condición inicial que se tome, siempre se termina en el origen. Esta característica hace que este punto crítico sea asintóticamente estable.

Ahora, si cambiamos el parámetro a $k = 2$, resulta:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-2t}, \end{aligned}$$

dividiendo las ecuaciones:

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} e^t,$$

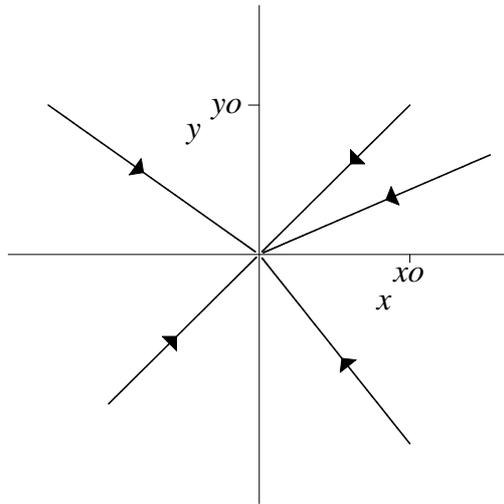


Figura 5.7: Diagrama de fase completo para $k = 1$

pero $e^t = \frac{x_0}{x(t)}$, reemplazando:

$$y(t) = \frac{y_0}{x_0^2} x^2(t).$$

Además se mantiene el comportamiento para tiempos positivos:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{cases}.$$

El gráfico en el plano XY queda se ilustra en la figura 5.8, donde se ve claramente que el origen todavía es asintóticamente estable.

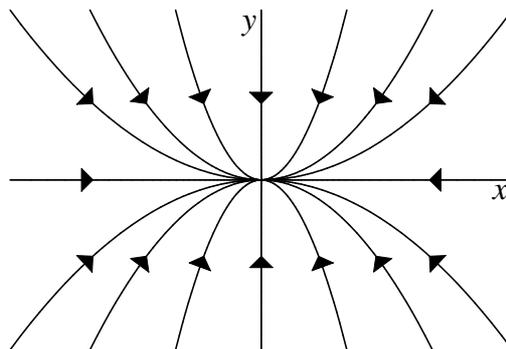


Figura 5.8: Diagrama de fase para $k = 2$

Si ahora analizamos para $k = -1$, tenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^t. \end{aligned}$$

Al multiplicar ambas ecuaciones, y luego despejar y :

$$y = \frac{x_0 y_0}{x},$$

que corresponden a ecuaciones de hipérbolas, cuando $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$. Además notamos que cuando

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0,$$

y por el contrario, cuando

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } y_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } y_0 < 0 \end{cases}$$

En este caso el origen deja de ser asintóticamente estable, puesto que siempre las trayectorias divergen en su componente en el eje Y , por lo que ahora es un punto inestable. \square

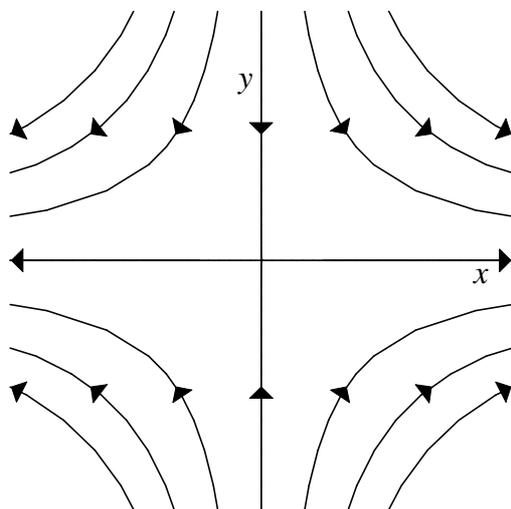


Figura 5.9: Diagrama de fase para $k = -1$

Hay que notar que permanentemente estamos usando el resultado de Existencia y Unicidad en los diagramas de fase: dado un punto (x_0, y_0) , entonces la solución del sistema:

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(x, y) \\ y'(t) &= G(x, y) \end{aligned}$$

es única, bajo las hipótesis del Teo. de Existencia y Unicidad para F y G . De esta forma existe una única trayectoria $(x(t), y(t))$ para cada (x_0, y_0) , esto es, existe una única función para la aplicación:

$$t \rightarrow (x(t), y(t)).$$

Para ejemplificar, tomemos nuevamente el sistema:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y, \end{cases} \quad (5.7)$$

en el que si suponemos dos condiciones iniciales distintas (x_0, y_0) y (x_1, y_1) , que para simplificar tomaremos $0 < x_0 < x_1$ y $0 < y_0 < y_1$, resultando las soluciones:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 e^{-t} \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} x(t) = x_1 e^{-t} \\ y(t) = y_1 e^{-t} \end{cases} \quad (5.9)$$

Si observamos el plano de fase de (5.7) para estas dos condiciones, aparentemente se tiene la misma solución (ver figura 5.10), pero al graficar separadamente $x(t)$ e $y(t)$ en las figura 5.11, para ambas condiciones iniciales se aprecia la diferencia de las soluciones.

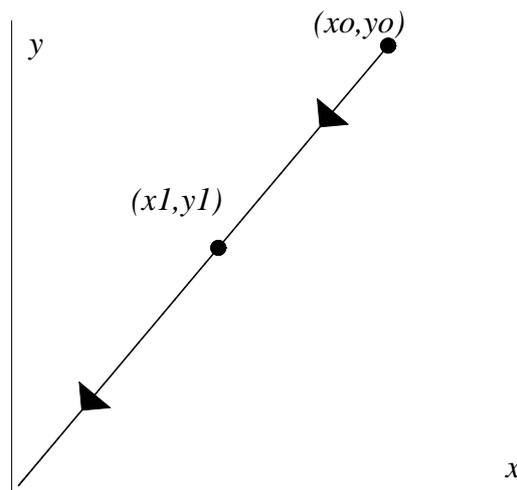


Figura 5.10: Diagramas de fase de (5.7) para dos condiciones iniciales

La explicación es el Teo. de Existencia y Unicidad que dice que las trayectorias son únicas, sin embargo, en el diagrama de fase lo que se grafica es el recorrido de las trayectorias y lo que sucedió en el caso anterior es que dos trayectorías distintas tienen igual recorrido.

Si queremos ver la unicidad de las trayectorías en diagrama de fase, es decir la unicidad de la aplicación que a cada t le asocia un punto $(x(t), y(t))$, tomemos por ejemplo $t = 0$ y $t = 1$.

En la figura 5.12 se aprecia claramente que para dos valores distintos de t , le corresponden distintos puntos en el diagrama de fases.

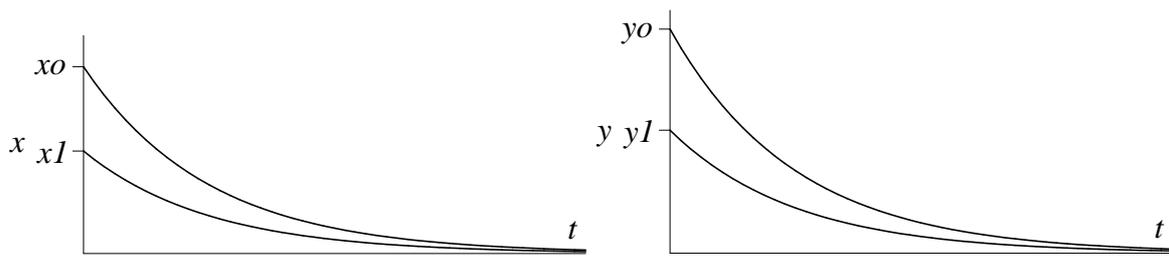


Figura 5.11: Soluciones de (5.7) para dos condiciones iniciales

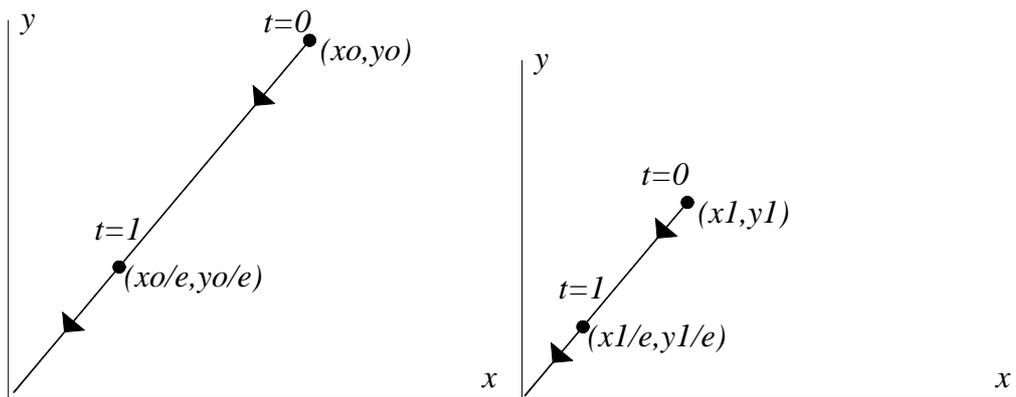


Figura 5.12: Unicidad de la trayectorias

¿Y qué es el punto $(0, 0)$? Si tomamos la condición inicial $(x_0, y_0) = (0, 0)$, por Teo. de Existencia y Unicidad, deducimos la solución es la función nula: $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0, \forall t$, es decir, tenemos una trayectoria constante, que a cada t se le asocia el origen:

$$t \longrightarrow (x(t), y(t)) = (0, 0),$$

por tanto su recorrido es el singletón $\{(0, 0)\}$. En este caso se da la particularidad de que al tomar está condición inicial el sistema no cambia al cambiar t , es decir, es un punto de equilibrio del sistema (o punto crítico).

Para completar el análisis general de recorridos y trayectorias, nos preguntamos si se puede dar el caso de que se intersecten dos recorridos de dos trayectorias distintas, como por ejemplo en la figura 5.13.

Lo anterior quiere decir que el punto de intersección (x_0, y_0) se puede tomar como una condición inicial de un mismo sistema, y resultan dos trayectorias distintas, lo que contradice el teo. de Existencia y Unicidad local. Por tanto, tenemos que en general, en el diagrama de fases a puntos en recorridos distintos de trayectorias diferentes corresponden recorridos que no se intersectan en tiempo finito. Lo que sí se puede dar para dos trayectorias distintas, es que sus recorridos se

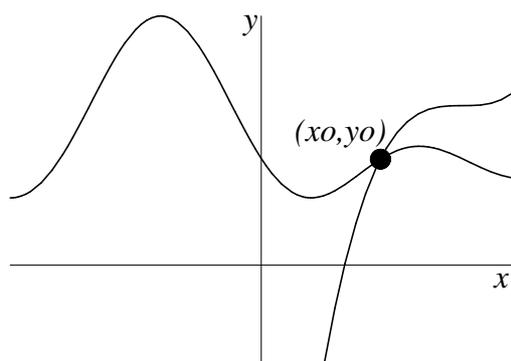


Figura 5.13: Intersección de Recorridos

confundan. Por ejemplo, tomemos la trayectorias:

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (\sin(t), \cos(t)) \text{ con C.I. } (x(0), y(0)) = (0, 1) \quad (5.10)$$

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)) \text{ con C.I. } (x(0), y(0)) = (1, 0). \quad (5.11)$$

Para despejar de estas ecuaciones el tiempo, basta elevar al cuadrado y sumar, y así se tiene que tanto (5.10) como (5.11) cumplen que $x^2 + y^2 = 1$ es decir su recorrido es el mismo conjunto de puntos, pero están orientados en sentidos opuestos, como se ilustra en la figura 5.14.

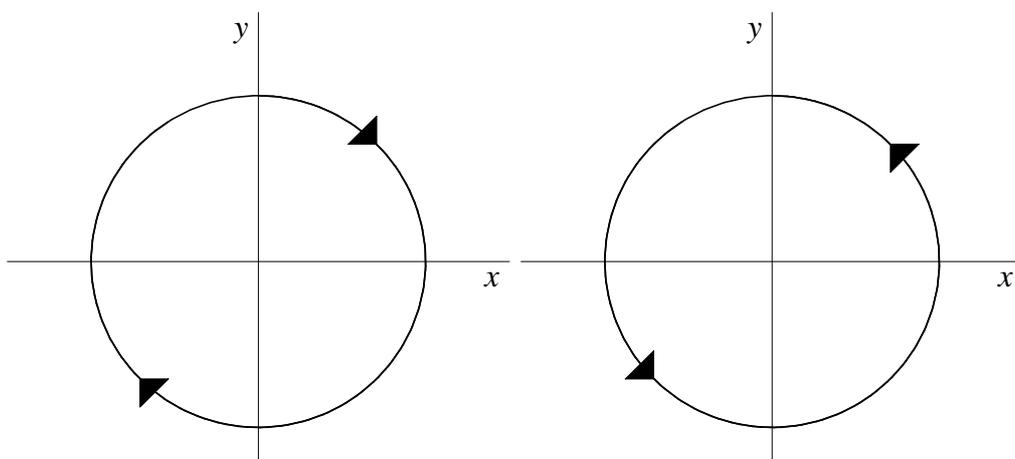


Figura 5.14: A la izquierda, el recorrido orientado de (5.10), y a la derecha el de (5.11)

Si queremos hacer que las dos trayectorias tengan el mismo recorrido, incluyendo el sentido, basta modificar (5.11) a:

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (\cos(t), -\sin(t)) \text{ con C.I. } (x(0), y(0)) = (1, 0).$$

Concluimos finalmente dos propiedades sobre trayectorias y recorridos.

Propiedades 5.4.1. (i) Dada una condición inicial, existe una única trayectoria que parte de ella.

(ii) En un diagrama de fases los recorridos no pueden intersectarse en tiempo finito, o de hacerlo se confunden en un único recorrido (sin orientación).

Definición 5.4.4. Se dice que una trayectoria $t \rightarrow (x(t), y(t))$ converge (o tiende) al punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) cuando $t \rightarrow \infty$ si:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \bar{x} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \bar{y}. \end{aligned}$$

Análogamente se dice que la trayectoria converge al punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) cuando $t \rightarrow -\infty$ si:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) &= \bar{x} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) &= \bar{y}. \end{aligned}$$

Pero puede tenerse casos de trayectorias convergiendo cuando $t \rightarrow \infty$ de distintas formas, como se muestra en la figura 5.15.

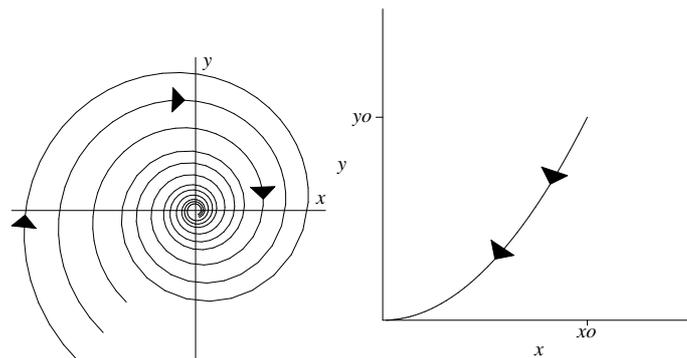


Figura 5.15: Trayectorias que convergen al origen

Vemos que hay una gran diferencia geométrica: en el gráfico izquierdo de la Figura 5.15, la trayectoria se aproxima al origen sin una dirección específica, a diferencia del gráfico derecho, donde claramente tiende a una dirección fija cuando se acerca al origen.

Definición 5.4.5. Si además de converger al punto (\bar{x}, \bar{y}) cuando $t \rightarrow +\infty$, la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}},$$

entonces se dice que la trayectoria entra al punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) tangente a una semirrecta cuando $t \rightarrow \infty$.

De la misma forma, si además de converger al punto (\bar{x}, \bar{y}) cuando $t \rightarrow -\infty$ la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}}$$

se dice que la trayectoria sale del punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) tangente a una semirrecta cuando $t \rightarrow -\infty$.

Definición 5.4.6. Un punto crítico aislado (\bar{x}, \bar{y}) se llama nodo si todas las trayectorias vecinas, o bien entran al punto (\bar{x}, \bar{y}) , o bien salen de él.

Por ejemplo, para el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y, \end{aligned}$$

ya sabemos que las trayectorias convergen a $(0, 0)$, y además, cualquier trayectoria vecina que tenga una condición inicial (x_0, y_0) , tendremos que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y_0 e^{-t} - 0}{x_0 e^{-t} - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

Por lo tanto $(0, 0)$ es efectivamente un nodo.

Definición 5.4.7. Un punto crítico aislado (\bar{x}, \bar{y}) se llama punto silla si existen dos trayectorias opuestas que convergen a él cuando $t \rightarrow \infty$, y existen dos trayectorias opuestas que convergen al mismo punto crítico cuando $t \rightarrow -\infty$.

Las restantes trayectorias no convergen, y resultan ser asintóticas a las direcciones antes mencionadas

Como ejemplo, podemos tomar el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y, \end{aligned}$$

donde $(0, 0)$ es punto silla (ver Figura 5.16)

Definición 5.4.8. Diremos que un punto crítico es punto espiral si todas las trayectorias en una vecindad del punto convergen pero no entran cuando $t \rightarrow \infty$, o convergen pero no salen cuando $t \rightarrow -\infty$.

Un punto crítico es llamado centro si todas las trayectorias en una vecindad del punto son cerradas y existen trayectorias arbitrariamente cerca del punto.

Ejemplo 5.4.2. Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= -\beta x + \alpha y, \end{aligned} \tag{5.12}$$

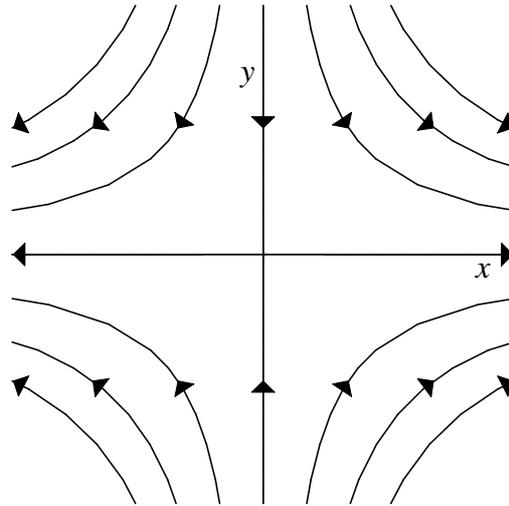


Figura 5.16: Punto silla

con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ dadas, que tiene claramente el único punto crítico $(0, 0)$. Este es un sistema lineal de matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \alpha \pm i\beta$, y los vectores propios asociados son:

$$(A - (\alpha + i\beta)I)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$(A - (\alpha - i\beta)I)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego A es diagonalizable, de la forma $A = PDP^{-1}$, donde:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha t}e^{\beta t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t}e^{-\beta t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} & e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2} \\ -e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2} & e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Observar que

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación en un ángulo β)

Finalmente, la solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

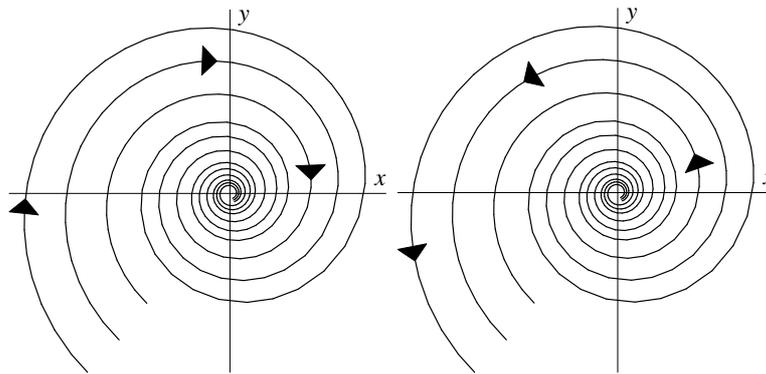


Figura 5.17: Diagrama de fase del sistema (5.12). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta > 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta < 0$.

De esta forma, vemos que la solución está formada por una ponderación del vector (x_0, y_0) por $e^{\alpha t}$, seguida de una rotación en un ángulo βt . Luego, para bosquejar los diagramas de fase del sistema, sólo es necesario considerar los signos de α y β , pues nos dirán si las trayectorías se alejan o se acercan del origen, cuando $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$, respectivamente; y el sentido de las trayectorías, siendo antihorario u horario, si $\beta < 0$ o $\beta > 0$, respectivamente (ver Figuras 5.17, 5.18, 5.19).

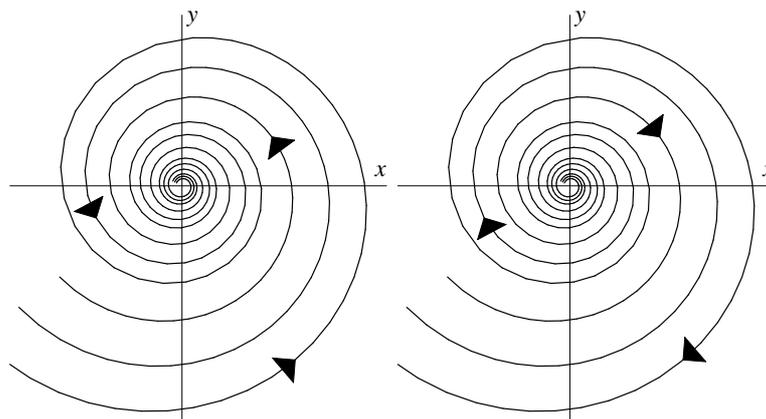


Figura 5.18: Diagrama de fase del sistema (5.12). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta < 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

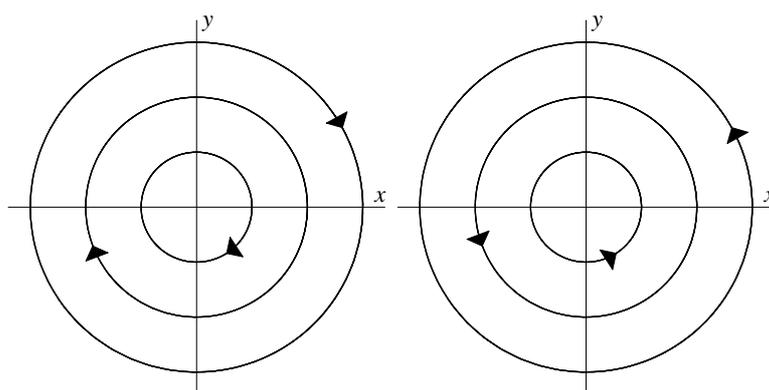


Figura 5.19: Diagrama de fase del sistema (5.12) para $\alpha = 0$. A la izquierda $\beta > 0$, y a la derecha $\beta < 0$.

Finalmente de las Figuras 5.17, 5.18, 5.19, concluimos las características del punto crítico $(0, 0)$: si $\alpha < 0$ es un punto espiral asintóticamente estable; si $\alpha > 0$ es un punto espiral inestable; si $\alpha = 0$ es un centro estable.

□

5.4.1. Sistemas Lineales

Nos interesa estudiar ahora con profundidad los sistemas linealizados, puesto que Henri Poincaré demostró que bajo las hipótesis adecuadas, si se logra clasificar cualitativamente un punto crítico, por ejemplo en términos de nodo, espiral, etc., entonces estas mismas características se mantendrán en el sistema original no lineal. Y por otra parte, Alexander Liapunov demostró que bajo ciertas hipótesis, se conservaba la estabilidad asintótica de los puntos críticos al linealizar. Por esta razón, ahora nos concentraremos en los sistemas lineales y pospondremos un momento el enunciado exacto de estos teoremas.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer como punto crítico $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ (si este no fuera el caso, basta efectuar una traslación), y entonces consideramos el sistema lineal:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy, \end{aligned} \tag{5.13}$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, y con $ad - bc \neq 0$, para que de esta forma el punto $(0, 0)$ sea el único punto crítico del sistema (y sea aislado).

Tomamos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con valores propios λ_1, λ_2 , esto es, las soluciones de:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{\text{traza}(A)} \lambda + \underbrace{(ad - bc)}_{\det(A)} = 0,$$

de donde

$$\det(A) = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2.$$

Luego la condición $ad - bc \neq 0$ es equivalente a $\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$, por lo que ahora nos concentramos sólo en los valores propios de A , pudiendo ocurrir los siguientes casos:

(I) Casos Principales

- (i) λ_1, λ_2 reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de igual signo.
- (ii) λ_1, λ_2 reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de distinto signo.
- (iii) λ_1, λ_2 complejos conjugados, con parte real no nula.

(II) Casos Frontera

- (i) λ_1, λ_2 reales, $\lambda_1 = \lambda_2$
- (ii) λ_1, λ_2 complejos conjugados, con parte real nula (imaginarios puros)

(I) Casos Principales.

En todos estos casos los valores propios son distintos, por ende la matriz es diagonalizable, es decir, se puede escribir de la forma $A = PDP^{-1}$, con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad P = (v_1 \mid v_2),$$

donde v_1, v_2 son los respectivos vectores propios asociados a λ_1, λ_2 . De esta forma la solución del sistema lineal es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

pero $e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Así:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}} \\ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma, el problema se desacopla en estas nuevas coordenadas $\tilde{x}\tilde{y}$, introducidas por la dirección de los vectores propios, resultando simplemente:

$$\tilde{x} = e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 \tag{5.14}$$

$$\tilde{y} = e^{\lambda_2 t} \tilde{y}_0. \tag{5.15}$$

Como queremos estudiar el diagrama de fase, eliminamos la variable t de las ecuaciones, elevando (5.14) a λ_2 , (5.15) a λ_1 , y luego dividiendo:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{\lambda_2} &= e^{\lambda_1 \lambda_2 t} \tilde{x}_0^{\lambda_2} \\ \tilde{y}^{\lambda_1} &= e^{\lambda_1 \lambda_2 t} \tilde{y}_0^{\lambda_1} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\tilde{x}^{\lambda_2}}{\tilde{y}^{\lambda_1}} = \frac{\tilde{x}_0^{\lambda_2}}{\tilde{y}_0^{\lambda_1}} \Rightarrow \tilde{y} = c_0 \tilde{x}^{\lambda_2/\lambda_1},$$

donde $c_0 = \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0^{\lambda_2/\lambda_1}}$ es una constante.

Veamos por casos: si algún $\lambda_i < 0$, por ejemplo para λ_2 , tendremos que en su correspondiente dirección

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} \tilde{y}_0 = 0,$$

y si por el contrario, algún $\lambda_i > 0$, por ejemplo para λ_1 , tendremos que en su correspondiente dirección:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 = \pm \infty,$$

donde el signo de $\pm \infty$ está dado por el signo de la condición inicial.

(i) λ_1, λ_2 reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de igual signo.

Sólo hay dos casos: $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ o $\lambda_2/\lambda_1 < 1$.

El bosquejo del diagrama de fases para el caso $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ se tiene en la Figura 5.20. En el gráfico de la izquierda, para $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, el origen es inestable.

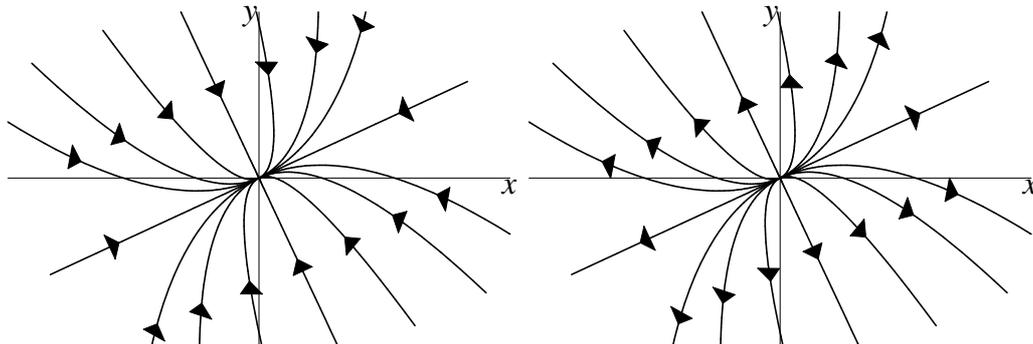


Figura 5.20: Diagramas de fase de (5.13) para $\lambda_2/\lambda_1 > 1$.

Para el caso $\lambda_2/\lambda_1 < 1$, se tiene la Figura 5.21. En el gráfico de la izquierda, para $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, el origen es inestable.

Como conclusión tenemos que en ambos casos el punto $(0, 0)$ es un nodo. Si $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, entonces es asintóticamente estable, mientras que si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, entonces es inestable. Además, vemos que en general para el caso de valores propios reales distintos de igual signo, los recorridos de las trayectorias son siempre tangentes a la recta dada por la dirección del vector propio asociado al valor propio de menor módulo.

En efecto:

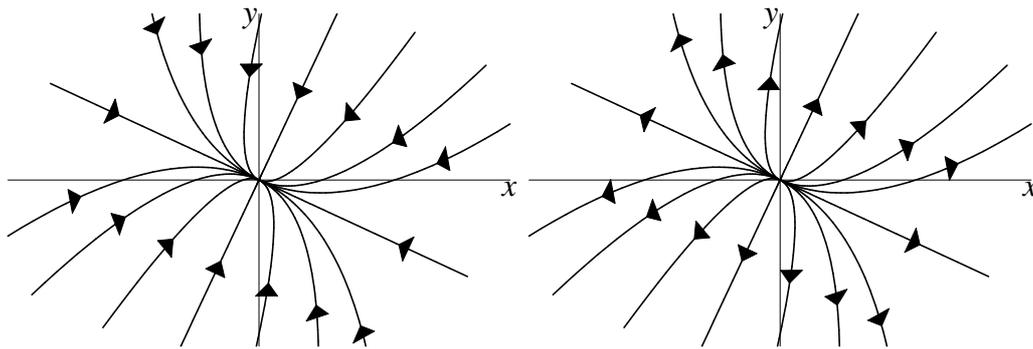


Figura 5.21: Diagramas de fase de (5.13) para $\lambda_2/\lambda_1 < 1$.

- $|\lambda_1| < |\lambda_2| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \Rightarrow$ recorrido tangente a v_1 .
 - $|\lambda_2| < |\lambda_1| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \Rightarrow$ recorrido tangente a v_2 .
- (ii) λ_1, λ_2 reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de distinto signo.
 En este caso tendremos $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, y los diagramas de fase serán los de la Figura 5.22, donde el diagrama de la izquierda representa el caso $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, mientras que el de la derecha muestra el caso contrario.

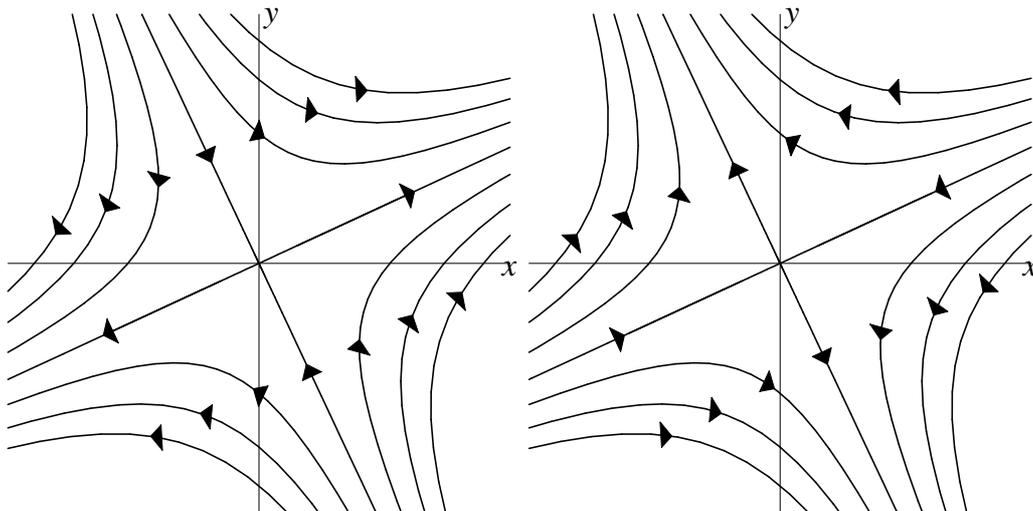


Figura 5.22: Diagramas de fase de (5.13) para λ_2 y $\lambda_1 < 1$ de signos distintos.

En resumen, para valores propios de reales de distinto signo, el punto crítico es un punto silla, inestable, y el eje de las trayectorias convergente corresponde al del vector propio asociado al valor propio negativo.

Ejemplo 5.4.3 (Continuación de conejos y ovejas). Volvamos nuevamente al ejemplo

de conejos compitiendo con las ovejas:

$$\begin{aligned}x' &= 60x - 3x^2 - 4xy \equiv F(x, y) \\y' &= 42y - 3y^2 - 2xy \equiv G(x, y),\end{aligned}$$

y sabemos que:

$$\mathcal{C} = \{(0, 0), (0, 14), (20, 0), (12, 6)\}.$$

Vimos que este sistema era casi lineal entorno a estos cuatro puntos críticos, por lo que le podemos analizar los sistemas linealizados, y por las propiedades de Poincaré y Liapunov, sabremos que se mantiene su naturaleza para el (SNLA).

El Jacobiano era:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 - 6x - 4y & -4x \\ -2y & 42 - 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

Luego en cada punto crítico tenemos:

- a) $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$ que tiene los valores propios: $\lambda_1 = 60$, $\lambda_2 = 42$, por lo que el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo inestable.

Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que los recorridos de las trayectorias son tangentes a la dirección v_2 .

- b) $J(20, 0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene los valores propios: $\lambda_1 = -60$, $\lambda_2 = 2$, por lo que el punto crítico $(20, 0)$ es un punto silla inestable.

Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 80 \\ -62 \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que el eje de los recorridos de las trayectorias convergentes es la dirección v_1 .

- c) $J(0, 14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$ que tiene los valores propios: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -42$, por lo que el punto crítico $(0, 14)$ es un punto silla inestable.

Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 46 \\ -28 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que el eje de los recorridos de las trayectorias convergentes es la dirección v_2 .

d) $J(12,6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$ que tiene los valores propios: $\lambda_1 = -27 - 3\sqrt{73} \approx -52,6$, $\lambda_2 = -27 + 3\sqrt{73} \approx -1,4$ por lo que el punto crítico $(12,6)$ es un nodo asintóticamente estable.

Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 + \sqrt{73} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 - \sqrt{73} \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que los recorridos de trayectorias son tangentes a la dirección v_2 .

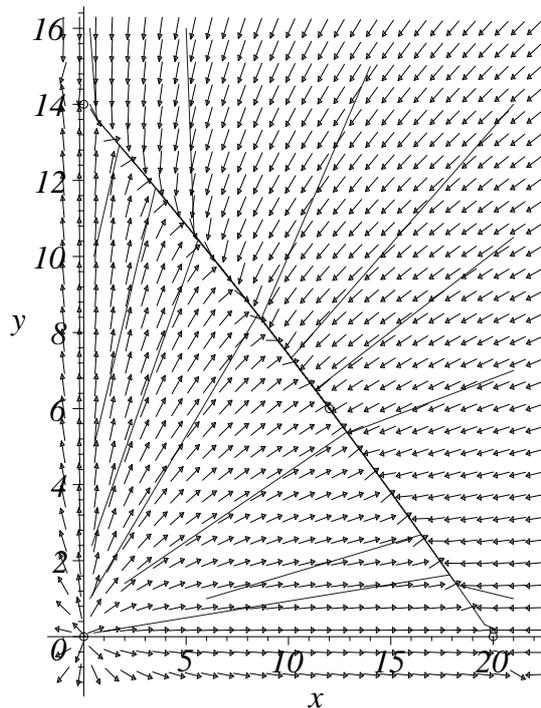


Figura 5.23: Diagramas de fase del modelo de conejos y ovejas

En conclusión tenemos que en el punto $(0,0)$ donde ambas especies desaparecen es inestable, al igual que cuando una sola especie sobrevive en los puntos $(20,0)$ y $(0,14)$. El punto $(12,6)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo que si tomamos cualquier condición inicial que no sean los otros puntos críticos, tendremos que en un tiempo suficientemente extenso se dará la coexistencia de conejos y ovejas en las vecindades del punto $(12,6)$. El diagrama de fase queda esbozado en la figura 5.23. \square

(iii) λ_1, λ_2 complejos conjugados, con parte real no nula, esto es:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

con $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.

Esto es equivalente (con un cambio de base) al sistema:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} \\ \tilde{y} &= -\beta\tilde{x} + \alpha\tilde{y},\end{aligned}$$

notando que las matrices $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, tienen igual polinomio característico. Sin embargo, ya habíamos analizado este caso en el ejemplo (5.4.2), y concluimos que si $\alpha \neq 0$, siempre el punto crítico correspondía a un punto espiral, siendo un punto espiral asintóticamente estable cuando $\alpha < 0$, y espiral inestable si $\alpha > 0$.

Ejemplo 5.4.4. Péndulo no lineal Ahora que tenemos más herramientas, seguiremos con el ejemplo del péndulo no lineal.

El sistema:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x)\end{aligned}$$

tiene puntos críticos $\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, y el Jacobiano respectivo es:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x) & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

por tanto los valores propios dependerán de la paridad de k :

- k impar:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} - \frac{g}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} + \frac{g}{L}}.$$

Puesto que todas las constantes físicas del péndulo son positivas, estamos en el caso de valores propios reales de distintos signo, por lo que los puntos críticos resultan ser puntos sillas inestables.

- k par:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} + \frac{g}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{g}{L}}.$$

Ahora es necesario volver a analizar por casos el signo del radicando:

- a) *Sobre amortiguado:* El caso $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{g}{L}$ nos entrega dos valores propios reales distintos, ambos negativos, por lo que los puntos críticos $(k\pi, 0)$ resultan nodos asintóticamente estables.

b) *Sub amortiguado*: El caso $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L}$ nos entrega dos valores propios complejos conjugados, por lo que los puntos críticos $(k\pi, 0)$ resultan puntos espirales, y como $\alpha = -\frac{c}{2m} < 0$, tenemos que además son asintóticamente estables.

Este caso corresponde al más común, que ocurre cuando el coeficiente de roce es pequeño (notar que $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L} \Leftrightarrow c < 2m\frac{g}{L}$). Así tenemos que si el péndulo está en posición vertical hacia arriba, que corresponde a los puntos k impar $(2(n+1)\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ es un equilibrio inestable, tal como sabemos de la intuición de que si en esta posición lo perturbamos ligeramente, oscila hasta volver a la posición vertical hacia abajo, que son los puntos espirales asintóticamente estables con k par $(2n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (ver Figura 5.24).

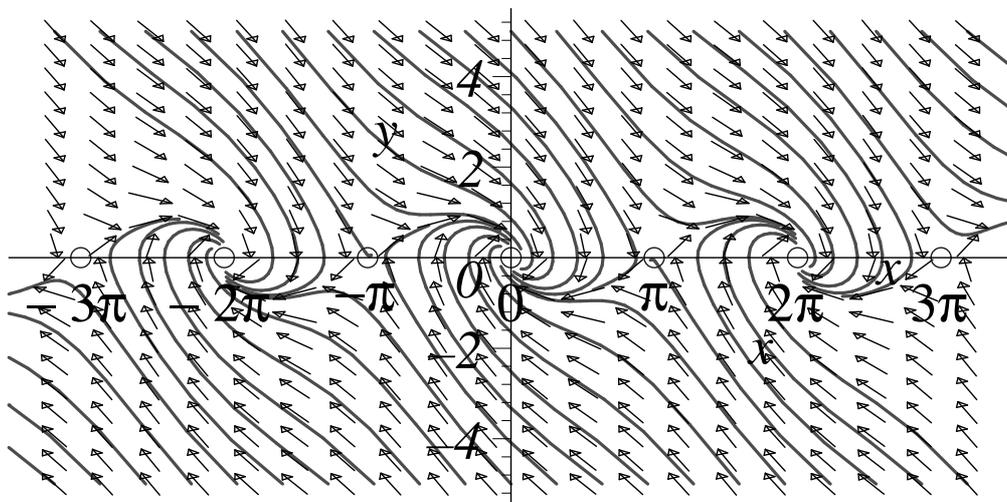


Figura 5.24: Diagramas de fase del péndulo subamortiguado.

c) *Críticamente amortiguado*: El caso $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$ nos entrega un sólo valor propio real negativo. Este caso aún no lo hemos analizado, por lo que lo pospondremos momentáneamente.

□

(II) Casos Frontera

- (i) λ_1, λ_2 reales, $\lambda_1 = \lambda_2$.
Tenemos el sistema

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\y' &= cx + dy,\end{aligned}$$

con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ no es necesariamente diagonalizable (pues tiene el valor propio repetido), pero en este caso siempre se puede llevar a una descomposición $A =$

PJP^{-1} , con J una Forma Canónica de Jordan, que puede tener uno o dos bloques. En el caso de tener dos bloques es el caso trivial en que resulta la matriz:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

y de aquí $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$.

Luego, la ecuación en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados v_1, v_2 es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda t} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y} = e^{\lambda t} \tilde{y}_0 \end{cases}.$$

El diagrama de fase de este caso ya es bien conocido del comienzo del capítulo (ver Figura 5.7 para caso $\lambda < 0$). Es claro que el punto crítico será un nodo asintóticamente estable si el valor propio es negativo, y un nodo inestable si es positivo.

En el caso que resulte un sólo bloque de Jordan, tenemos:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

y entonces

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

De esta forma el sistema en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados v_1, v_2 , es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda t} \tilde{x}_0 + te^{\lambda t} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y} = e^{\lambda t} \tilde{y}_0 \end{cases}.$$

De aquí se tiene que si $\lambda < 0$ resulta un nodo asintóticamente estable, y si $\lambda > 0$, es un nodo inestable.

De la segunda ecuación del sistema anterior se puede despejar

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right),$$

y reemplazando en la primera se obtiene:

$$\tilde{x} = \tilde{y} \left(\frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right) \right);$$

si ahora derivamos con respecto a \tilde{y} :

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} = \left(\frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right) \right) + \frac{1}{\lambda} = \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + t + \frac{1}{\lambda}$$

De esta forma, resulta claro que $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, de modo que todas las trayectorias son tangentes a una recta paralela al eje \tilde{x} .

- (ii) λ_1, λ_2 complejos conjugados, con parte real nula (imaginarios puros).
Nuevamente esto equivale (con un cambio de base) al sistema:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} \\ \tilde{y} &= -\beta\tilde{x} + \alpha\tilde{y},\end{aligned}$$

tomando $\alpha = 0$, y del ejemplo 5.4.2, se tiene el punto crítico resulta ser un centro.

Con esto tenemos analizados todos los casos posibles, en función de los valores propios. Para aplicar todo lo anterior, veamos el siguiente ejemplo que reformula los resultados obtenidos.

Ejemplo 5.4.5 (Traza-determinante). Consideremos el sistema lineal $X' = AX$ con $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ matriz constante invertible. Como entre las principales características de una matriz están su determinante y su traza, que determinan un plano traza/determinante (ver Figura 5.25) con distintas regiones, queremos tratar de representar en estas regiones la información sobre el único punto crítico que posee, el origen (pues A es invertible).

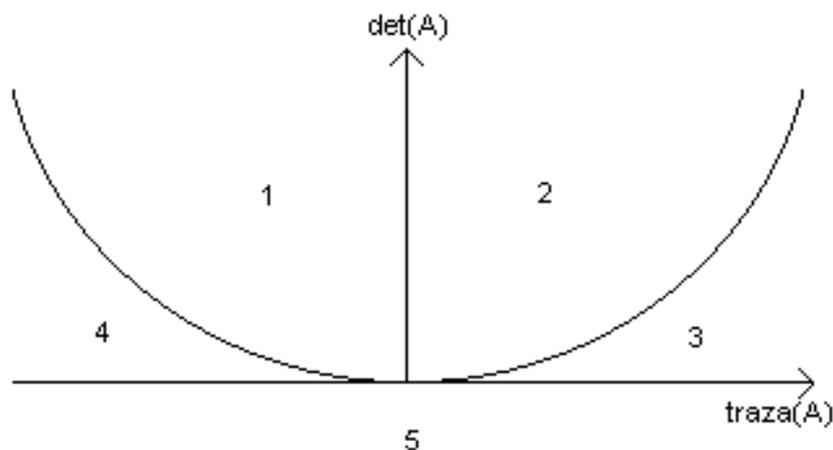


Figura 5.25: Plano traza/determinante.

Podemos escribir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, cuyo polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A),$$

con raíces

$$\lambda = \frac{-tr(A) \pm \sqrt{tr(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}.$$

Según vimos, lo primero que habría que distinguir son las raíces reales de las complejas, es decir, estudiar el discriminante

$$tr(A)^2 - 4 \det(A).$$

Como nos interesa el plano traza/determinante, usaremos para simplificar la notación

$$x = tr(A), \quad y = \det(A);$$

así se ve claramente que la curva $x^2 - 4y = 0$ es una parábola.

Cuando estemos en el caso $4y > x^2$ (sobre la parábola), tendremos el caso de raíces complejas conjugadas, y por tanto el punto crítico será un punto espiral si $x \neq 0$, siendo estable si $x > 0$ (zona 2) e inestable en caso contrario (zona 1). Si $x = 0$, tenemos un centro.

En el caso $4y < x^2$ (bajo la parábola), tenemos que separar en casos, según el signo de y (el determinante):

- $y = \det(A) > 0$

Las raíces son reales y siempre tienen igual signo, y es el signo de x . Si $x > 0$, la parte real de las raíces es negativa, y por tanto tenemos un nodo asintóticamente estable (zona 3), y si $x < 0$ será inestable (zona 4).

- $y = \det(A) < 0$

Las raíces son reales y siempre tienen distinto signo, por lo que tendremos sólo puntos silla inestables en la zona 5.

Sobre la parábola tenemos el caso $tr(A) = \det(A) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, por lo que se tienen nodos inestables si $x > 0$ y nodos asintóticamente estables si $x < 0$.

Hemos concluido así una forma que nos permite tener una idea general del punto crítico de un sistema sólo viendo la traza y determinante de la matriz, sin tener que calcular valores y vectores propios explícitamente (aunque en realidad la traza y el determinante determinan únicamente a los valores propios, y viceversa). Sin embargo, si queremos un gráfico preciso del diagrama de fases es inevitable calcular los vectores propios, pues indican las direcciones de tangencia de las trayectorias, para el caso que corresponda. \square

Ahora que ya sabemos como se comporta el sistema lineal en función de sus valores propios, podemos enunciar de forma completa los teoremas de Poincaré y Liapunov:

Teorema 5.4.1 (Poincaré). *Sea (\bar{x}, \bar{y}) un punto crítico de un (SNLA) cuasilineal, y λ_1, λ_2 los valores propios de $J(\bar{x}, \bar{y})$, entonces el punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) en el (SNLA) será:*

(i) Un nodo si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, distintos y de igual signo.

En este caso además todas las trayectorias (excepto dos) son tangentes en (\bar{x}, \bar{y}) a la dirección propia asociada al valor propio de módulo menor. Las otras dos, están sobre la otra dirección propia.

(ii) Un punto silla si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, de distinto signo.

En este caso además hay dos trayectorias convergentes a (\bar{x}, \bar{y}) en la dirección propia asociada al valor propio negativo, y dos divergentes en la dirección propia asociada al valor propio positivo. Las demás, tienen como asíntotas las direcciones propias.

(iii) Un punto espiral si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $\Re(\lambda_1) \neq 0$ y $\Re(\lambda_2) \neq 0$

Teorema 5.4.2 (Liapunov). Sea (\bar{x}, \bar{y}) un punto crítico de un (SNLA) cuasilineal, y λ_1, λ_2 los valores propios de $J(\bar{x}, \bar{y})$, entonces el punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) en el (SNLA) será:

(i) Asintóticamente estable si $\Re(\lambda_1) < 0$ y $\Re(\lambda_2) < 0$.

(ii) Inestable si $\Re(\lambda_1) > 0$ o $\Re(\lambda_2) > 0$.

Observación. Por simplicidad en los teoremas anteriores se ha hecho referencia a las trayectorias, cuando se quiere referir a su recorrido en el diagrama de fases

Los resultados anteriores son la base del análisis de los sistemas no lineales, pero no nos dicen nada en los casos en que los valores propios toman los valores frontera. Por ejemplo, en el caso del péndulo críticamente amortiguado en que $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$, el sistema linealizado tenía un sólo valor propio negativo, lo que correspondería a un nodo asintóticamente estable en el sistema lineal, pero no sabemos exactamente que comportamiento sigue en el no lineal.

5.5. Estabilidad con funciones de Liapunov

En ramos físicos se suele utilizar mucho la energía de un sistema para determinar los puntos de equilibrio de un sistema. Básicamente las funciones de Liapunov generalizan este principio en sistemas conservativos: un punto de equilibrio es estable si es un mínimo local de la energía potencial efectiva.

Veamos nuevamente el ejemplo del péndulo, pero primero supongamos $c = 0$ (sin disipación de roce),

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -\frac{g}{L} \sin(x)\end{aligned}$$

La energía cinética de este sistema es: $K = \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 = \frac{1}{2}mL^2y^2$, y la energía potencial $U = mgL(1 - \cos(\theta)) = mgL(1 - \cos(x))$, entonces la energía total es:

$$V(x, y) = K + U = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x))$$

Si derivamos esta función con respecto al tiempo, puesto que $x = x(t), y = y(t)$ usando la regla de la cadena, tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = mgl \sin(x)x' + mL^2y'$$

Pero reemplazando x', y' de las ecuaciones del sistema no lineal, tenemos que

$$\frac{dV}{dt} = 0, \forall t \Rightarrow V(t) = V_0, \forall t$$

Lo que indica que la energía se mantiene constante, y los puntos de mínimo de V son efectivamente los puntos críticos del sistema $\{(2k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Si ahora consideramos el péndulo con roce:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x) \end{aligned}$$

Las ecuaciones para la energía son exactamente las mismas, por lo que todavía $V(x, y) = K + U = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x))$, pero si derivamos y luego reemplazamos x', y' de este sistema amortiguado, tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = -cLy^2 \leq 0$$

Encontramos que la energía disminuye con el paso del tiempo, por efecto del roce, y es natural pensar que entonces debe tener más posibilidad de que se le “acabe” la energía y encuentre un punto de equilibrio estable. Es más, antes ya vimos que la posición vertical hacia abajo es punto de equilibrio asintóticamente estable. Esta intuición queda concretizada en el teorema de Liapunov.

Teorema 5.5.1 (Liapunov). *Sea (\bar{x}, \bar{y}) un punto crítico aislado de una (SNLA)*

$$\begin{aligned} V : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow V(x, y) \end{aligned}$$

una función continuamente diferenciable. Sea \mathcal{D} una vecindad perforada de (\bar{x}, \bar{y}) (i.e. $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \mathcal{D}$) tal que $V(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ y $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \mathcal{D}$. Entonces:

1. *Si $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \leq 0, \forall (x, y) \in \mathcal{D}$, entonces (\bar{x}, \bar{y}) es estable.*
2. *Si $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G < 0, \forall (x, y) \in \mathcal{D}$, entonces (\bar{x}, \bar{y}) es asintóticamente estable.*
3. *Si $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G > 0, \forall (x, y) \in \mathcal{D}$, entonces (\bar{x}, \bar{y}) es inestable.*

Nota. (i) Las funciones F y G del enunciado del teorema son las típicas del (SNLA).

(ii) La función del Teorema anterior se conoce como *función de Liapunov* de un sistema.

Demostración. Demostremos primero (i). Dado $\varepsilon > 0$, como V es continua, existe

$$\min\{V(x, y) \mid (x, y) \in \partial\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)\} = m > 0,$$

donde se usa la notación usual $\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ para la bola (euclidiana) de centro (\bar{x}, \bar{y}) y radio ε , y $\partial\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ denota su frontera (que es compacta en \mathbb{R}^2).

Por la continuidad de V existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \delta) \subseteq \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \cap (\mathcal{D} \cup (\bar{x}, \bar{y}))$, tal que $V(x, y) < m/2, \forall (x, y) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \delta)$. Tomemos en t_0 la condición inicial $(x_0, y_0) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \delta)$, y la trayectoria asociada $(x(t), y(t))$. Luego $V(x_0, y_0) < m/2$, y además

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) \leq 0, \quad \forall (x(t), y(t)) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \delta),$$

y por tanto

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

de donde

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) < m/2, \quad \forall t \geq 0,$$

por lo tanto, como $(x(t), y(t))$ es una función continua, la curva que describe no intersecta a $\partial\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ para ningún t . Por lo tanto se tiene la estabilidad de (\bar{x}, \bar{y}) .

Para ver (ii) supongamos que (\bar{x}, \bar{y}) no es asintóticamente estable, pero como de lo anterior sabemos que es estable, tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \subseteq (\mathcal{D} \cup (\bar{x}, \bar{y}))$. Luego existe $\sigma > 0$ tal que $(x(t), y(t)) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) / \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \sigma), \forall t \geq t_0$. Por otro lado:

$$V(x(t), y(t)) = V(x_0, y_0) + \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt}(x(s), y(s)) ds,$$

pero por hipótesis

$$\frac{dV}{dt}(x(s), y(s)) = \frac{\partial V}{\partial x} F(x(s), y(s)) + \frac{\partial V}{\partial y} G(x(s), y(s)) < 0,$$

luego tomamos

$$\max\left\{\frac{dV}{dt}(x(s), y(s)) : (x(s), y(s)) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) / \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \sigma)\right\} = -k,$$

con $k > 0$. Pero entonces:

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) - (t - t_0)k, \quad \forall t > t_0.$$

Como t se puede tomar arbitrariamente grande, se tiene que a partir de algún \bar{t} , $V(x(t), y(t)) < 0$, que es una contradicción. \square

Para el ejemplo del péndulo sin roce la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}mL^2\dot{y}^2 + mgL(1 - \cos(x))$$

claramente se anula en los puntos críticos, y es estrictamente positiva en todos los otros puntos, y vimos que $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, por lo que por el Teo. anterior, tenemos que los puntos críticos son estables, que es la misma conclusión que obtuvimos con el análisis de linealización del sistema

Para el sistema amortiguado, si tomamos la misma función V anterior, tenemos que se cumplen las hipótesis del teorema, pero como $\frac{dV}{dt} = -cL\dot{y}^2 \leq 0$, sólo podemos concluir que el origen es estable, siendo que sabemos que es asintóticamente estable. En un sistema cualquiera, la función de Liapunov es una herramienta muy útil, pero el problema es que hay que probar con diferentes funciones y tratar de encontrar una que sirva. En el caso de sistemas físicos conservativos, la energía total del sistema es una buena función a considerar, pero ya notamos que en el caso del péndulo amortiguado es otra la “buena” función a considerar.

Consiremos el péndulo amortiguado, tomando $\frac{c}{m} = \frac{g}{L} = 1$ para facilitar los cálculos. Según lo discutido cuando se resolvió este péndulo, ya sabemos que los puntos críticos son asintóticamente estables, pues pertenece al caso subamortiguado. Probemos con la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

que claramente cumple con la condición de anularse sólo en el punto $(x, y) = (0, 0)$, y es continuamente diferenciable en todo \mathbb{R}^2 , y

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = (x + y + 2x)y - (x + y + y)(y + \sin(x)) = 2xy - y^2 - (x + 2y)\sin(x)$$

Pero del teorema de Taylor sabemos que

$$\sin(x) = x - \frac{\cos(\xi)}{3}x^3$$

donde ξ está entre 0 y x . Como para usar el teorema basta encontrar una vecindad del origen, consideremos $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, con lo que $0 < \cos(\xi) < 1$. Reemplazando esto:

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -(x^2 + y^2) + \frac{\cos(\xi)}{3}x^3(x + 2y)$$

Para esta expresión todavía es difícil establecer si cambia de signo o no, pero notando la simetría radial, hagamos el cambio a coordenadas polares: $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$

$$\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = -r^2 + \frac{\cos(\xi)}{3}r^4 (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta))$$

Gruesamente podemos usar la cota:

$$-1 < \cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) < 3$$

y entonces:

$$-\frac{1}{3} < \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)) < 1$$

Luego, tomando $r < 1$, se tiene

$$\left| r^2 \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)) \right| < 1$$

de donde se concluye

$$\frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G = -r^2 \left\{ 1 + r^2 \left(\frac{\cos(\xi)}{3} (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)) \right) \right\} < 0$$

en la vecindad $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$

Finalmente concluimos por el teorema de estabilidad de Liapunov que el origen es asintóticamente estable.

Capítulo 6

Series de potencias y función de Bessel

6.1. Soluciones en forma de series de potencias

6.1.1. Series de potencias

Una serie de potencias en torno a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es una expresión de la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (*)$$

donde $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Definición 6.1.1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice analítica en x_0 si existe $\rho > 0$ tal que f se puede representar de la forma (*), para cualquier $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. Además se requiere que la serie sea absolutamente convergente.

Al supremo de los números > 0 que cumplen la condición anterior se le llama radio de convergencia de la serie.

Observación: Una condición suficiente para que una serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converja absolutamente es $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} < 1$. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} > 1$, la serie diverge. Aplicando esto a $b_k = a_k (x - x_0)^k$, y notando que $\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} |x - x_0|$ se tiene que (*) converge absolutamente en x si $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} |x - x_0| < 1$, y diverge si este límite es > 1 . De aquí, si ρ^* es el radio de convergencia de la serie, se tiene la fórmula

$$\rho^* = \sup\{\rho > 0 \quad t.q. \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \rho < 1\}$$

o equivalentemente

$$\rho^* = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}}$$

Notar que si el límite es 0, entonces el radio de convergencia es infinito.

Ejemplo 6.1.1. Consideremos $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$, serie de potencias en torno a $x_0 = 0$.

$$\rho^* = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{k+1}} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la serie converge absolutamente si $|x| < \frac{1}{2}$ y diverge si $|x| > \frac{1}{2}$.

Ejemplo 6.1.2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, serie de potencias en torno a $x_0 = 0$.

$$\rho^* = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty$$

\Rightarrow la serie converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Propiedad 6.1.1. Si $\rho^* > 0$ es el radio de convergencia de la serie (*), entonces ésta converge uniformemente en el intervalo $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$, para cualquier $0 < \rho < \rho^*$. Esto significa que la sucesión de funciones $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$ converge uniformemente a su límite cuando $n \rightarrow \infty$.

Como consecuencia, se tiene que f es infinitas veces derivable, y la derivación bajo el signo sumatoria, es decir:

$$|x - x_0| < \rho^* \Rightarrow \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

También se tiene la integración bajo el signo sumatoria:

$$|x - x_0| < \rho^* \Rightarrow \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k (x - x_0)^k dx + C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + C$$

Observación:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = 1 \cdot a_1$$

$$f''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$$

En general,

$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n$$

de donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

En resumen, f es analítica en x_0 ssi

$$|x - x_0| < \rho^* \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Esta última expresión se conoce como serie de Taylor de f en torno a x_0 .

Observación: Hemos visto que toda función analítica es infinitas veces derivable, sin embargo la recíproca no es cierta, como lo muestra el siguiente ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

f es infinitas veces derivable en 0 y $f^n(0) = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$. Luego si f fuese analítica en 0, entonces existiría $\rho > 0$ tal que

$$|x| < \rho^* \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

y esto último es claramente falso.

A continuación, algunos ejemplos de desarrollo en serie de Taylor para funciones analíticas conocidas.

Ejemplo 6.1.3.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad x_0 = 0, \quad \rho^* = \infty$$

Ejemplo 6.1.4.

$$\text{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \quad x_0 = 0, \quad \rho^* = \infty$$

Ejemplo 6.1.5.

$$\text{cos}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad x_0 = 0, \quad \rho^* = \infty$$

Ejemplo 6.1.6.

$$\ln(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k \quad x_0 = 1, \quad \rho^* = 1$$

Ejemplo 6.1.7.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad x_0 = 0, \quad \rho^* = 1, a_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 6.1.8.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad x_0 = 0, \quad \rho^* = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int x^{2k} dx + C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + C$$

Como $\frac{d}{dx} \arctg(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

De aquí se puede obtener una fórmula para π .

$$\frac{\pi}{4} = \arctg(1) \Rightarrow \pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

6.1.2. El método de la serie de potencias

Dada una E.D.O., postulamos una solución de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, algún x_0 , y el problema se reduce a encontrar los coeficientes a_k .

Ejemplo 6.1.9. Consideremos la ecuación $y'' - y = 0$, cuya solución general es $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Con el método de la serie de potencias, supongamos $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $x_0 = 0$, con radio de convergencia $\rho^* > 0$.

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$$

$$y'' - y = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} - a_k)x^k}_{(**)} = 0$$

Como esta igualdad es funcional, todos los coeficientes deben ser 0, de donde se obtiene la recurrencia:

$$a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$$

Ahora hay que tratar de resolverla. Notemos que

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{2} & a_3 &= \frac{a_1}{3 \cdot 2} \\ a_4 &= \frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} & a_5 &= \frac{a_3}{4 \cdot 5} = \frac{a_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ a_6 &= \frac{a_0}{6!} & a_7 &= \frac{a_1}{7!} \end{aligned}$$

Luego el patrón es

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!} \quad a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!}$$

Así, a_0 y a_1 quedan como constantes arbitrarias. Podemos escribir

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

La primera de estas series corresponde a $\cosh(x)$, y la segunda a $\sinh(x)$. Luego, reconociendo las series, llegamos a la solución general esperada. Por supuesto, como a priori no se conoce la serie, pasos del tipo $(**)$ no están bien justificados. Tampoco se sabe si la convergencia es absoluta, luego no se puede asegurar la derivación bajo el signo sumatoria. Sin embargo, hay que asumir que todo esto se puede hacer, y a posteriori, cuando se ha encontrado la serie, se calcula el radio de convergencia (que en este caso es infinito) y se verifica que lo obtenido realmente es solución.

Ejemplo 6.1.10. $2y'' + xy' + y = 0$

Igual que antes, suponemos $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $x_0 = 0$. Notemos que $xy'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$. Reemplazando en la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{\infty} (2(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+1)a_k)x^k + 4a_2 + a_0 = 0 \end{aligned}$$

Se obtiene la recurrencia

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{2(k+2)}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 2 \cdot 1} \quad a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2 \cdot 4} = \frac{a_0}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4} \quad a_5 = -\frac{a_3}{2 \cdot 5} = \frac{a_1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} \quad a_7 = -\frac{a_5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Luego el patrón es

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k+1} k!} \quad a_{2k+1} = (-1)^k \frac{a_1}{2^k 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1)}$$

Ordenando igual que antes, se obtiene

$$y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

donde $y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k+1} k!}$ e $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^k 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1)}$.

Es fácil reconocer y_0 :

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-x^2}{4}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-x^2}{4}\right)^k \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + e^{-\frac{x^2}{2}})$$

6.1.3. Justificación del método

Por ahora, no se ve claro bajo qué condiciones el método funciona. Se introducirá el concepto de punto ordinario y se establecerá un teorema que asegure la efectividad del método.

Consideremos la ecuación

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \text{en } I =]a, b[\quad (*)$$

Definición 6.1.2. $x_0 \in I$ se dice punto ordinario de (*) si $a_0(x_0) \neq 0$ y las funciones $P_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ y $P_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$ son analíticas en x_0 .

Teorema 6.1.1. Si x_0 es un punto ordinario de (*), entonces aquella ecuación posee dos soluciones l.i., series de potencias en torno a x_0 . Más aún, el radio de convergencia de estas series es a lo menos tan grande como el menor radio de convergencia entre P_1 y P_2 .

Ejemplo 6.1.11. $y'' + x^2y' + (\text{sen}x)y = 0$. Se tiene que cualquier $x \in \mathbb{R}$ es ordinario, pues $a_0 \equiv 1$ y $x^2, \text{sen}x$ son analíticas en todo \mathbb{R} . Luego, dado x_0 existirán dos soluciones l.i., series de potencias en torno a x_0 , con radio de convergencia infinito. En general, para la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, se tiene que x_0 es un punto ordinario ssi P y Q son analíticas en x_0 . En tal caso, hay dos soluciones l.i., series de potencias en torno a x_0 , con radio de convergencia al menos igual al menor de entre P y Q .

Ejemplo 6.1.12. $(1 + x^2)y'' + y' + x^2y = 0$. Esta ecuación equivale a $y'' + \frac{1}{1+x^2}y' + \frac{x^2}{1+x^2}y = 0$. $x_0 = 0$ es un punto ordinario, pues $\frac{1}{1+x^2}$ y $\frac{x^2}{1+x^2}$ son analíticas en 0, con radio de convergencia 1. Luego hay solución analítica en 0, con radio de convergencia a lo menos 1.

Observación: Si $P(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$, donde a y b son polinomios sin factores comunes, y x_0 es tal que $b(x_0) \neq 0$, entonces P es analítica en x_0 y el radio de convergencia correspondiente es igual a la distancia entre x_0 y la raíz compleja de b más próxima a él.

Ejemplo 6.1.13. $y'' + \frac{x}{x^2+2x+5}y' + x^2y = 0$. Entonces 2 es punto ordinario, existe una solución analítica en 2 y su radio de convergencia es a lo menos aquél de $P(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}$. Aquí $b(x) = x^2 + 2x + 5$, cuyas raíces son $-1 + 2i, -1 - 2i$, estando ambas a la misma distancia de 2. Por la observación, el radio de convergencia de P es $|2 - (-1 + 2i)| = \sqrt{13}$.

Definición 6.1.3. *Un punto que no es ordinario se dice singular.*

Cuando estamos en presencia de puntos singulares, es difícil decir algo sobre existencia de soluciones. Sin embargo, en algunos casos algo se puede hacer.

Ejemplo 6.1.14. La ecuación $(x - x_0)^2y'' + a(x - x_0)y' + by = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se conoce como ecuación de Euler. x_0 es un punto singular. Tratar de obtener una solución en serie de potencias en torno a otro punto se haría muy complicado (hacer la prueba). Sin embargo, hay otra manera de resolverla, más rápida, que se ilustrará con el caso $x_0 = 0$. Se postula una solución de la forma $y(x) = x^r$, y el problema se reduce a encontrar r . Reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2r(r-1)x^{r-2} + axrx^{r-1} + bx^r &= 0, \Leftrightarrow (r^2 + r(a-1) + b)x^r = 0 \\ \Leftrightarrow r^2 + r(a-1) + b &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación se conoce como ecuación indicial. Sean r_1, r_2 las raíces correspondientes. Hay tres casos:

- (1) r_1, r_2 reales y distintas. En este caso, x^{r_1}, x^{r_2} son soluciones l.i.
- (2) $r_1 = r_2$. En este caso, x^{r_1} es solución y se puede chequear que $x \ln x$ es otra solución, l.i. con la primera.

(3) r_1, r_2 complejas. Haciendo $r_1 = \alpha + i\beta$, se tiene $x^{r_1} = x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} = x^\alpha (\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x))$. Luego $x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$ son dos soluciones reales y l.i.

Para el caso x_0 arbitrario se obtienen las mismas soluciones que antes poniendo $(x - x_0)$ en lugar de x . El éxito al resolver la ecuación se debe a que 0 es un punto singular de tipo especial. La siguiente definición explica la característica que lo hace distinguido.

Definición 6.1.4. x_0 es un punto singular regular de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ si $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2Q(x)$ son funciones analíticas en x_0 .

Ejemplo 6.1.15. Ecuación de Legendre: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + P(P + 1)y = 0 \quad P \in \mathbb{R}$.

Aquí, $P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$, $Q(x) = \frac{P(P+1)}{1-x^2}$. Los puntos singulares son 1 y -1. Se tiene $(x - 1)P(x) = \frac{2x}{x+1}$, que es analítica en 1. Además, $(x - 1)^2Q(x) = \frac{x-1}{x+1}P(P + 1)$, que es analítica en 1. Luego 1 es un punto singular regular. Análogamente se verifica que -1 también es un punto singular regular.

Ejemplo 6.1.16. Ecuación de Bessel: $x^2y'' + xy' + (x^2 - P^2)y = 0 \quad P \in \mathbb{R}$

Aquí, $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = 1 - \frac{P^2}{x^2}$. 0 es punto singular. Se tiene $xP(x) \equiv 1$, que es analítica en 0. Además, $x^2Q(x) = x^2 - P^2$, que es analítica en 0. Luego 0 es un punto singular regular.

Ejemplo 6.1.17. $y'' + y' \frac{1}{(1-x)^2} + xy = 0$. 1 es un punto singular. Sin embargo, no es regular porque $P(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ y $(x - 1)P(x) = \frac{1}{1-x}$, que no es analítica en 1.

6.1.4. Método de Frobenius

Consideremos la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)$$

y sea x_0 un punto singular regular.

Las funciones $b(x) = (x - x_0)P(x)$ y $c(x) = (x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0 , digamos $b(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots$, $c(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$. Con esto, (*) se escribe

$$y'' + \frac{b(x)}{x - x_0}y' + \frac{c(x)}{(x - x_0)^2}y = 0$$

$$y'' + \frac{b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots}{x - x_0}y' + \frac{c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots}{(x - x_0)^2}y = 0$$

Cuando $x - x_0$ es "chico", la última ecuación "se parece" a

$$y'' + \frac{b_0}{x - x_0}y' + \frac{c_0}{(x - x_0)^2}y = 0$$

una ecuación de Euler. Una solución es $y(x) = (x - x_0)^r$, donde r es solución de la ecuación indicial

$$r^2 + r(b_0 - 1) + c_0 = 0$$

Entonces la idea para resolver (*) es corregir el error cometido al despreciar las potencias de $x - x_0$ mediante una serie de potencias. Esto es el método de Frobenius. Se postula

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+r}$$

con r el mismo de antes.

Notemos que

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)a_k (x-x_0)^{k+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_k (x-x_0)^{k+r-2}$$

Ejemplo 6.1.18. $x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$. Aquí, 0 es un punto singular regular (verifique!). Busquemos entonces soluciones en torno a 0. Tenemos $b(x) \equiv -1$, $c(x) = 1-x$, y $b_0 = b(0) = -1$, $c_0 = c(0) = 1$. Luego la ecuación de Euler asociada es $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$, y la ecuación indicial es $r^2 - 2r + 1 = 0$, que tiene una raíz doble ($r = 1$). Luego una solución de la ecuación de Euler es $y_1(x) = x$. Usando el método de Frobenius, postulemos $y(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}$. Reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y'' - xy' + (1-x)y = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)ka_k x^{k-1} - x \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_k x^k + (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)ka_k x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2}}_{\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k k^2 - a_{k-1}) x^{k+1} \end{aligned}$$

Luego la recurrencia es

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{k^2}$$

y fácilmente sale la solución

$$a_k = \frac{a_0}{(k!)^2}$$

Hemos encontrado una solución de la ecuación original, a saber, $y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^{k+1}$.

Ejemplo 6.1.19. $xy'' + 4y' - xy = 0$. $x_0 = 0$ es un punto singular regular. $b(x) \equiv 4$, $c(x) = -x^2$. Luego la ecuación de Euler asociada es $y'' + \frac{4}{x}y' = 0$, con ecuación indicial $r(r+3) = 0$, cuyas soluciones son 0 y -3. Intentaremos $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$, con $r=0$ ó -3.

$$\begin{aligned} 0 &= xy'' + 4y' - xy = x \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r-2} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)a_k x^{k+r-1} - x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r+3)a_k x^{k+r-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r+3)a_k x^{k+r-1} - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+r-1} \\ &= \underbrace{r(r+3)}_0 a_0 x^{r-1} + (r+1)(r+4)a_1 x^r + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+r)(k+r+3)a_k - a_{k-2}) x^{k+r-1} \end{aligned}$$

de donde $a_1 = 0$ y $a_k = \frac{a_{k-2}}{(k+r)(k+r+3)}$.

Para $r = 0$, $a_k = \frac{a_{k-2}}{k(k+3)}$. De esta recurrencia tenemos $a_1 = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Veamos la parte par:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{2 \cdot 5} \quad a_4 = \frac{a_2}{4 \cdot 7} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} \quad a_6 = \frac{a_4}{6 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9} \\ \Rightarrow a_{2k} &= \frac{a_0}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k))(5, 7, 9 \dots (2k+3))} = \frac{a_0}{2^k k! (5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2k+3))} \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

Luego obtenemos una solución, $a_0 y_0(x) = a_0 (1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k! (5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2k+3))})$

Para $r = -3$, $a_k = \frac{a_{k-2}}{k(k-3)}$, $k \neq 3$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2} \quad a_4 = \frac{a_2}{1,4} = -\frac{a_0}{1,2,4} \quad a_6 = \frac{a_4}{3 \cdot 6} = -\frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} \\ \Rightarrow a_{2k} &= -\frac{a_0}{(2k-2)! 2k} \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

Si $k = 3$, la ecuación original dice $0 = a_3 3(3-3) - a_0 = -a_0 \Rightarrow a_0 = 0$, lo que ya se sabía. Luego esta ecuación no dice nada sobre a_3 , que queda como parámetro libre. Como sólo nos interesa calcular 1 solución l.i. con y_0 , podemos elegir $a_3 = 0$, y luego la recurrencia dice $a_{2k+1} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Entonces la segunda solución viene dada por $a_0 y_1(x) = a_0 x^{-3} (1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k-2)! 2k})$.

y la solución general será

$$y(x) = C_1 y_0(x) + C_2 y_1(x)$$

Ejemplo 6.1.20. $xy'' + 3y' - xy = 0$. Aquí 0 es un punto singular regular con ecuación indicial asociada $r(r+2) = 0$, de donde $r = 0$ ó -2 . Intentaremos $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$, con $r = 0$ ó -2 . Procediendo igual que antes se llega a

$$0 = xy'' + 3y' - xy = \underbrace{r(r+2)}_0 a_0 x^r + (r+1)(r+3)a_1 x^{r-1} + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+r)(k+r+2)a_k - a_{k-2})x^{k+r}$$

de donde $a_1 = 0$ y $a_k = \frac{a_{k-2}}{(k+r)(k+r+2)}$.

Para $r = 0$, $a_k = \frac{a_{k-2}}{k(k+2)}$. De esta recurrencia tenemos $a_1 = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Veamos la parte par:

$$a_2 = \frac{a_0}{2 \cdot 4} \quad a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} \quad a_6 = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8}$$

$$\Rightarrow a_{2k} = \frac{a_0}{2^{2k-1}(k!)^2(2k+2)}$$

Luego obtenemos una solución, $a_0 y_0(x) = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k-1}(k!)^2(2k+2)}\right)$

Para $r = -2$, $a_k = \frac{a_{k-2}}{k(k-2)}$, $k \neq 2$, luego $a_1 = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Si $k = 2$, la ecuación original dice $0 = a_2 2(2-2) - a_0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$ y a_2 queda libre.

$$a_4 = \frac{a_2}{2 \cdot 4} \quad a_6 = \frac{a_2}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} \quad \Rightarrow a_{2k} = \frac{a_2}{2^{2k-1}(k!)^2(2k+2)}$$

Finalmente

$$a_2 y_1(x) = x^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = x^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} x^{2k+2} = a_2 x^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{2^{2k-1}(k!)^2(2k+2)} = a_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k-1}(k!)^2(2k+2)}$$

Notemos que y_1 no es l.i. con y_0 . Sin embargo, en el ejemplo anterior, el método fue exitoso en encontrar la solución general. En lo que sigue veremos cuando funciona y cuando es necesario hacer alguna modificación.

x_0 punto singular regular, r_1, r_2 raíces de la ecuación indicial. Se distinguen los siguientes casos:

(a) $r_1 \neq r_2$ y $r_1 - r_2$ no es un número entero. Entonces existen dos soluciones l.i. de la forma

$$y_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

(c) $r_1 = r_2$. En este caso existen dos soluciones l.i. de la forma

$$y_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

(c) $r_1 - r_2$ es un número entero y $r_1 > r_2$. Entonces existen dos soluciones l.i. de la forma

$$y_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

(la constante C puede ser 0)

En el último ejemplo se aplica el caso (c). Continuémoslo buscando una solución de la forma $y(x) = C y_1(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k-2}$, donde y_1 es la solución que ya habíamos encontrado.

$$y'(x) = C y_1' \ln x + C \frac{y_1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} (k-2) b_k x^{k-3}$$

$$y''(x) = C y_1'' \ln x + 2C \frac{y_1'}{x} - C \frac{y_1}{x^2} + \sum_{k=0}^{\infty} (k-2)(k-3) b_k x^{k-4}$$

Reemplazando

$$0 = xy'' + 3y' - xy = C \underbrace{(xy_1'' + 3y_1' - xy_1)}_0 \ln x + 2C y_1' - C \frac{y_1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} (k-2)(k-3) b_k x^{k-3}$$

$$+3C\frac{y_1}{x} + 3\sum_{k=0}^{\infty}(k-2)b_kx^{k-3} - \sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-1} = 2C(y_1' + \frac{y_1}{x}) + \sum_{k=0}^{\infty}(k-2)b_kx^{k-3} - \sum_{k=2}^{\infty}b_{k-2}x^{k-3} \quad (**)$$

Pero $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, a_k conocido.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (**) &= 2C \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_k x^{k-1}}_{\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)a_{k-2} x^{k-3}} + \sum_{k=2}^{\infty} (b_k(k-2)k - b_{k-2})x^{k-3} + -\frac{b_1}{x^2} \\ &= -\frac{b_1}{x^2} + \sum_{k=2}^{\infty} (2C(k-1)a_{k-2} + b_k(k-2)k - b_{k-2})x^{k-3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_1 = 0, \quad b_0 \text{ queda libre,} \quad 2Ca_0 = b_0 \quad \text{y la recurrencia es} \quad b_k = \frac{b_{k-2} - 2C(k-1)a_{k-2}}{(k-2)k}$$

Con lo anterior es posible resolver b_k y encontrar C , en el peor caso con ayuda de un computador.

6.2. La ecuación de Bessel en una aplicación

La ec. de Bessel surge en muchas aplicaciones de la física y la ingeniería. Para motivar su estudio se considera el siguiente ejemplo: Las vibraciones de una membrana circular (cama elástica) de radio unitario se pueden describir mediante la función $u(r, \theta, t)$, que representa el desplazamiento vertical de la membrana en la posición (r, θ, t) -coord. polares- en el instante t .

Los físicos encuentran que u satisface la ec. diferencial a derivadas parciales (E.D.P.) que sigue:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.1)$$

donde a es una constante propia de la membrana. Por simplicidad, supondremos $a = 1$ (esto siempre se puede hacer mediante un cambio de unidades). La idea es resolver (6.1). Como no hay herramientas, en este curso, para tratar este tipo de ecuaciones, haremos algunos supuestos adicionales. Supondremos que inicialmente ($t = 0$) la membrana tiene una configuración que no depende de θ , digamos $u(r, \theta, 0) = f(r)$, donde f es una función derivable que representa tal configuración. Además, en todo momento el borde de la membrana estará fijo. Por consistencia, $f(1) = 0$. Es razonable entonces pensar que la evolución en el tiempo de u tampoco dependerá de θ , es decir, $u = u(r, t)$. Así, se tendrá $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$. Ahora nos interesa encontrar una solución a como dé lugar. Supondremos que u se puede descomponer como producto de funciones $u(r, t) = R(r)T(t)$, donde R depende sólo de r y T sólo de t . Por otra parte, esperamos que la membrana oscile, es decir, que u sea periódica en el tiempo. Así, supondremos $T(t) = e^{iwt}$, w una constante (frecuencia). Por último, la membrana inicialmente está quieta. El problema queda así planteado:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.2)$$

-cond. iniciales

$$u(r, 0) = f(r) \quad \text{configuración inicial} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = 0 \quad \text{parte con velocidad nula} \quad (6.4)$$

-cond. de borde

$$u(1, t) = 0 \quad \text{el borde está fijo todo el tiempo} \quad (6.5)$$

Usando $u(r, t) = R(r)e^{i\omega t}$, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = R' e^{i\omega t} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R'' e^{i\omega t} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 R e^{i\omega t}$$

Reemplazando en (6.2) :

$$R'' e^{i\omega t} + \frac{1}{r} R' e^{i\omega t} = -\omega^2 R e^{i\omega t} \text{ llegando a:}$$

$$R(r)'' + \frac{1}{r} R'(r) + \omega^2 R(r) = 0 \quad (6.6)$$

Para eliminar ω de la ecuación, hacemos el c.v. $x = \omega r$

$$R' = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx} \frac{dx}{dr} = \omega \frac{dR}{dx} \quad R'' = \frac{d^2 R}{dr^2} = \omega^2 \frac{d^2 R}{dx^2}$$

en (6.6) : $\omega^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{\omega}{x} \omega \frac{dR}{dx} + \omega^2 R = 0$ finalmente:

$$R''(x) + \frac{1}{x} R'(x) + R(x) = 0 \quad (6.7)$$

donde ahora $()' = \frac{d}{dx}$

A (6.7) se le conoce como *ecuación de Bessel de orden 0*.

(6.7) es una E.D.O., así que podemos intentar resolverla. Se usa la transformada de Laplace.

Primero, se reescribe (6.7):

$$xR'' + R' + xR = 0 \quad /L$$

$$L(xR'') + L(R') + L(xR) = 0$$

Aplicando las bien conocidas propiedades de L , se obtiene:

$$\frac{dLR}{ds} = -\frac{s}{1+s^2} LR$$

$\Rightarrow \ln(LR) = -\int \frac{s}{1+s^2} ds = -\frac{1}{2} \ln(1+s^2) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)$ donde se omite la cte. de integración porque nos basta encontrar una solución solamente.

$LR = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ Para encontrar L^{-1} usaremos lo sgte.:

Sea $B_t(x) = (1+x)^t$, $t \in \mathbb{R}$. Expandiendo B_t en serie de Taylor obtenemos:

$B_t(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t(t-1)\dots(t-(p-1))}{p!} x^p$. Esta serie tiene radio de convergencia ∞ y es absolutamente convergente.

Usando esto:

$$\begin{aligned} LR &= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{s} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{B_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{s^2}\right)} = \frac{1}{s} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\frac{-1}{2} \left(\frac{-1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{-1}{2} - (p-1)\right)}{p!} \left(\frac{1}{s^2}\right)^p \\ &= \frac{1}{s} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{p! 2^p s^{2p}} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p)}{\underbrace{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p)}_{2^p (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p) = 2^p \cdot p!}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p)!}{(p!)^2 2^{2p}} \underbrace{s^{2p+1}}_{(*)} \end{aligned}$$

Llegamos a una expresión en serie para LR , pero la gracia es que (*) tiene una antitransformada conocida. Dada la convergencia absoluta de la serie (se puede verificar por el test de la razón), se puede integrar término a término:

$$R = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2 2^{2p}} L^{-1}\left(\frac{(2p)!}{s^{2p+1}}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2 2^{2p}} x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

A esta solución se le llama *función de Bessel de primera especie y de orden 0*, y se le denota J_0 .

$$J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots$$

Notemos que $J_0(0) = 1$ y $J_0'(0) = 0$. Puede sonar raro que la solución encontrada no sea una combinación de funciones conocidas (sin, cos, exp, log) sino una serie de potencias. Esto suele suceder al resolver ecuaciones que modelan fenómenos (la naturaleza no tiene por qué comportarse de maneras que nosotros entendamos). Esta función de Bessel se puede entender como la única solución de (6.7) que satisface las C.I. $J_0(0) = 1$ y $J_0'(0) = 0$ (Notar el parecido con $\cos(\cdot)$). En general, aprovechando la unicidad, todas las funciones usuales del cálculo pueden definirse de manera análoga. Pero (6.7) es una EDO de orden 2, así que debe haber otra solución l.i. La buscamos mediante la fórmula de Abel (se eliminan todas las constantes de integración porque sólo interesa encontrar una solución, no la sol. general):

$$\det \begin{pmatrix} y & J_0 \\ y' & J_0' \end{pmatrix} = e^{-\int \frac{dx}{x}} \Leftrightarrow J_0' y - J_0 y' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y' - \frac{J_0'}{J_0} y = -\frac{1}{x J_0}$$

$$\Rightarrow y = e^{\int \frac{J_0'}{J_0} dx} \int e^{\int \frac{J_0'}{J_0} dx} \frac{-1}{xJ_0} dx = -J_0 \int \frac{dx}{xJ_0^2}$$

El signo menos no interesa. A esta última función se le llama *función de Bessel de segunda especie y de orden 0*, denotándose I_0 .

$$I_0(x) = J_0 \int \frac{dx}{xJ_0^2} = J_0 \int \frac{1}{x} J_0^{-2} dx = J_0 \int \frac{1}{x} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \dots\right)^{-2}}_{B_{-2}\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \dots\right)} dx$$

$$I_0(x) = J_0 \int \frac{1}{x} \left(1 - \frac{2}{1!} \left(-\frac{x^2}{4} + \dots\right) + \frac{-2 \cdot -3}{2!} \left(-\frac{x^2}{4} + \dots\right)^2 + \dots\right) dx$$

$$I_0(x) = J_0 \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \dots\right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{6}{2!} \left(-\frac{x^2}{4} + \dots\right)^2 + \dots dx$$

$$I_0(x) = J_0 \left(\ln x + \frac{x^2}{4} + \dots\right)$$

Se ve que

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_0(x) = -\infty$$

Como estamos modelando una membrana que no oscila con amplitud infinita en el origen, no podemos usar I_0 . Luego, la solución es:

$$R\left(\frac{x}{w}\right) = J_0(x)K, \quad K = cte.$$

$$u(r, t) = J_0(wr)Ke^{iwt}$$

La parte real y la imaginaria son soluciones l.i. Así, la solución “más general” es:

$$u(r, t) = J_0(wr)(A \cos(wt) + B \sin(wt))$$

Debemos verificar la condición de borde (6.5)

$$0 = u(1, t) = J_0(w)(A \cos(wt) + B \sin(wt)) \Rightarrow J_0(w) = 0$$

Aquí surge el interés por conocer los ceros de J_0 . Se sabe que son infinitos y que forman un conjunto discreto, digamos $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ positivos y en orden creciente. Además, la diferencia entre ceros consecutivos tiende a π .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{n+1} - w_n = \pi$$

Para probar rigurosamente estos hechos hacen falta algunas herramientas teóricas, como el teorema de comparación de Sturm. Aquí veremos una explicación razonable de porqué esto es cierto. En la ec. (6.7) se puede hacer el cambio:

$$J_0(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}. \text{ Es claro que } J_0(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) = 0.$$

Reemplazando en (6.7) se llega a:

$$v'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)v = 0 \quad (6.8)$$

que se parece a

$$v'' + v = 0 \quad (6.9)$$

que sabemos que tiene soluciones \sin , \cos , que tienen infinitos ceros. Así, es de esperar cierto parecido entre J_0 y aquéllas. Además, para valores grandes de x casi no hay diferencia entre (6.8) y (6.9), así que se justifica que la diferencia $w_{n+1} - w_n$ sea casi π . Como $J_0(w) = 0$ tiene infinitas soluciones, no tenemos una solución para (6.2), sino infinitas.

$$u_n(r, t) = J_0(w_n r)(A_n \cos(w_n t) + B_n \sin(w_n t)) \quad n \in \mathbb{N}$$

Como (6.2) es lineal, podemos aplicar el *principio de superposición* para obtener la solución general.

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(w_n r) \cos(w_n t) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_0(w_n r) \sin(w_n t)$$

(!Otra vez una serie!)

Falta determinar las sucesiones A_n, B_n . Para esto se necesita el siguiente lema, que da una relación de ortogonalidad entre las funciones $\{J_0(w_k r)\}_{k \in \mathbb{N}}$

[Ortogonalidad]

$$\int_0^1 r J_0(w_i r) J_0(w_j r) dr = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Prueba: Recordando $R(r) = J_0(wr)$, se tiene que J_0 satisface la ecuación (6.6)

$$J_0''(wr) + \frac{1}{r} J_0'(wr) + w^2 J_0(wr) = 0 \Leftrightarrow (r J_0'(wr))' + w^2 r J_0(wr) = 0$$

Esta ecuación también la satisfacen $J_0(w_n r), \forall n$. Para simplificar, sean $y_i(r) = J_0(w_i r), \quad y_j(r) = J_0(w_j r), \quad i \neq j$.

$$(r y_i')' + w_i^2 r y_i = 0 \quad / \cdot y_j$$

$$(r y_j')' + w_j^2 r y_j = 0 \quad / \cdot y_i$$

\Rightarrow

$$y_j(ry'_i)' + w_i^2 ry_i y_j = 0 \quad (\alpha)$$

$$y_j(ry'_j)' + w_j^2 ry_i y_j = 0 \quad (\beta)$$

$$\begin{aligned} (\alpha) - (\beta) : (w_i^2 - w_j^2) ry_i y_j &= y_i(ry'_j)' - y_j(ry'_i)' = y_i(ry'_j)' + y'_i(ry'_j) - (y_j(ry'_i)' + y'_j(ry'_i)) = (y_i(ry'_j))' - (y_j(ry'_i))' \\ &= (r(y_i y'_j - y_j y'_i))' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (w_i^2 - w_j^2) ry_i y_j dr = [r(y_i y'_j - y_j y'_i)] \Big|_0^1 (w_i^2 - w_j^2) \int_0^1 r J_0(w_i r) J_0(w_j r) dr$$

$$= [r(J_0(w_i r) J'_0(w_j r) - J_0(w_j r) J'_0(w_i r))] \Big|_0^1 = J_0(w_i) J'_0(w_j) - J_0(w_j) J'_0(w_i) = 0 \quad \text{como se quería demostrar}$$

teniendo el lema, usamos (6.3):

$$\begin{aligned} f(r) = u(r, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(w_n r) \quad / \cdot r J_0(w_k r) \text{ (kfijo)} \\ r f(r) J_0(w_k r) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r J_0(w_n r) J_0(w_k r) \quad / \int_0^1 dr \\ \int_0^1 r f(r) J_0(w_k r) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \underbrace{\int_0^1 r J_0(w_n r) J_0(w_k r) dr}_{\substack{0 \quad \text{si} \quad n \neq k}} = A_k \int_0^1 r J_0^2(w_k r) dr \\ \Rightarrow A_k &= \frac{\int_0^1 r f(r) J_0(w_k r) dr}{\int_0^1 r J_0^2(w_k r) dr}, \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.10)$$

y ahora usamos (6.4):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_0(w_n r) \quad / \cdot r J_0(w_k r) \text{ (kfijo)} \\ 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r J_0(w_n r) J_0(w_k r) \quad / \int_0^1 dr \\ 0 &= B_k \underbrace{\int_0^1 r J_0^2(w_k r) dr}_{>0} \Rightarrow B_k = 0 \end{aligned}$$

Esto da una relación de independencia lineal entre las funciones $\{J_0(w_k r)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Finalmente, la solución a nuestro problema es:

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(w_n r) \cos(w_n t)$$

con A_n definido en (6.10).

Nada hasta ahora asegura que no haya otra función que sea solución al problema, podría haber otra fundamentalmente distinta. Sin embargo, es posible demostrar que no es así, es decir, que hay unicidad en la solución (el procedimiento anterior demuestra existencia mediante la construcción explícita de una solución), usando métodos del cálculo vectorial, que se ven en el curso de Matemáticas Aplicadas.