

Capítulo 2

Espacios Topológicos

2.7. Interior, exterior y frontera de un conjunto

Estudiaremos ahora un concepto tan importante en topología como el concepto de punto adherente.

2.7.1 Definición. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Un punto $x \in X$ es interior a A si existe una vecindad de x contenida en A . El conjunto de todos los puntos interiores a A se denota por A° y se llama el interior de A .

De la definición anterior se concluye que $A^\circ \subset A$ para todo $A \subset X$ como también que si A y B son subconjuntos de X y $A \subset B$ entonces $A^\circ \subset B^\circ$.

El siguiente resultado caracteriza el interior de un conjunto y su demostración es inmediata.

2.7.2 Proposición. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Entonces

$$A^\circ = \bigcup \{U \subset X : U \text{ es un conjunto abierto y } U \subset A\}.$$

En la siguiente proposición se resumen algunas de las más importantes propiedades de la operación interior $A \mapsto A^\circ : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

2.7.3 Proposición. *Sea X un espacio topológico.*

1. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ para cada $A \subset X$.
2. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ para cada $A, B \subset X$.
3. $A \subset X$ es abierto si y sólo si $A^\circ = A$.

Demostración. La demostración es consecuencia inmediata de la definición. \square

Tal como sucede con las operaciones de adherencia, dado un conjunto X y una función $A \mapsto A^\circ : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ con ciertas propiedades, se puede encontrar una topología sobre X en la que el interior de cada subconjunto de X está determinado por la función. Este es el resultado que se presenta en la siguiente proposición.

2.7.4 Proposición. *Sea X un conjunto y supongamos que se ha definido una operación $A \mapsto A^\circ : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que*

1. $A^\circ \subset A$ para cada $A \subset X$.
2. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ para cada $A \subset X$.
3. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ para cada $A, B \subset X$.
4. $X^\circ = X$.

Existe una topología sobre X cuya operación de interior es precisamente $A \mapsto A^\circ$.

En este caso se definen los conjuntos abiertos como aquellos conjuntos que son iguales a su interior. La prueba de que estos conjuntos forman la topología buscada es sencilla y la omitiremos aquí.

2.7.5 Ejemplos.

1. En \mathbb{R} con la topología usual, el interior del intervalo $[a, b]$ es el intervalo (a, b) pero NO siempre en un espacio métrico el interior de una bola cerrada $B[x, \epsilon]$ es la bola abierta $B(x, \epsilon)$. Nuevamente la métrica discreta sobre un conjunto con más de un punto nos ilustra este hecho.
2. Consideremos nuevamente \mathbb{R} con la topología usual. $\mathbb{Q}^\circ = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$. Nótese que $(\mathbb{Q}^\circ \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$. Este es un ejemplo que muestra que puede ocurrir $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$.

Si A es un subconjunto de un espacio topológico X decimos que el *exterior* de A es el interior del complemento de A , esto es, $(X \setminus A)^\circ$. Los puntos de X que no están ni en interior ni en el exterior de A tienen una característica especial: cada vecindad de uno de estos puntos contiene tanto puntos de A como puntos de $X \setminus A$. Se tiene entonces la siguiente definición.

2.7.6 Definición. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X . Un punto $x \in X$ es un punto frontera de A si para cada vecindad V se tiene $V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos frontera de A se denota por $Fr A$ y se llama la frontera de A .

Nótese que

$$Fr A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

y que la frontera de A es siempre un conjunto cerrado.

El siguiente resultado muestra algunas relaciones entre la adherencia, el interior y la frontera.

2.7.7 Proposición. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X .

1. $\overline{A} = A \cup Fr A$.
2. $A^\circ = A \setminus Fr A$.
3. $X = A^\circ \cup Fr A \cup (X \setminus A)^\circ$.

Demostración.

1. La inclusión $A \cup \text{Fr } A \subset \overline{A}$ es inmediata. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \notin A$, toda vecindad de x tiene puntos de A y puntos de su complemento (por lo menos a x). Entonces $x \in A \cup \text{Fr } A$ y $A \cup \text{Fr } A \subset \overline{A}$.
2. Si $x \in A^\circ$ entonces $x \in A$ y $x \notin \text{Fr } A$. Por otro lado si $x \in A \setminus \text{Fr } A$ entonces existe una vecindad de x contenida en A , de donde $x \in A^\circ$.
3. Si $x \notin A^\circ \cup \text{Fr } A$, existe una vecindad de x contenida en $X \setminus A$, de donde $x \in (X \setminus A)^\circ$.

□

2.7.8 Ejemplos.

1. En \mathbb{R} con topología usual, la frontera del intervalo (a, b) (así como del intervalo $[a, b]$ o de cualquier otro intervalo con extremos a y b) es el conjunto $\{a, b\}$.
2. En \mathbb{R} con topología usual, la frontera de \mathbb{Q} (y también de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) es \mathbb{R} .
3. Si X es un espacio topológico, $\text{Fr } X = \text{Fr } \emptyset = \emptyset$.
4. Cada subconjunto cerrado de \mathbb{R}^2 es la frontera de algún subconjunto de \mathbb{R}^2 . En efecto, si K es cerrado y $K^\circ = \emptyset$ entonces $\text{Fr } K = K$. En caso contrario sea F el conjunto de puntos de K con coordenadas racionales unido con el conjunto de puntos aislados de K (x es un punto aislado de K si existe una vecindad V de x tal que $V \cap K = \{x\}$). Se tiene que $\text{Fr } F = K$.

EJERCICIOS

1. Demuestre la Proposición 2.7.3.
2. Demuestre la Proposición 2.7.4.
3. Sea X es un espacio topológico. Demuestre o dé contraejemplos que refuten cada una de las siguientes afirmaciones:
 - a) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ para cada $A \subset X$.
 - b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ para cada A y cada B subconjuntos de X .
 - c) $(A^c)^\circ = (A^\circ)^c$ para cada $A \subset X$.
 - d) A° es abierto en X para cada $A \subset X$.
 - e) $\text{Fr}(\text{Fr } A) = \text{Fr } A$ para cada $A \subset X$.
 - f) $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr } A \cup \text{Fr } B$ para cada A y cada B subconjuntos de X .
 - g) $\text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr } A \cap \text{Fr } B$ para cada A y cada B subconjuntos de X .
 - h) $\text{Fr}(A^c) = (\text{Fr } A)^c$ para cada $A \subset X$.
 - i) $(\text{Fr } A)^\circ = \emptyset$ para cada $A \subset X$.
4. Determine el interior, el exterior y la frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos en \mathbb{R} .
 - a) \mathbb{Z} .
 - b) \mathbb{Q} .
 - c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - d) $(-1, 1]$.
 - e) $[1, \infty)$.
 - f) $\left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
 - g) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

5. Realice nuevamente el ejercicio anterior pero considerando la topología de los complementos finitos sobre \mathbb{R} .
6. Suponga que τ_1 y τ_2 son dos topologías sobre un mismo conjunto X y que τ_1 es más fina que τ_2 . Compare el interior y la frontera de un subconjunto A de X en (X, τ_1) con su interior y su frontera en (X, τ_2) .