

CURSO : MA22A CALCULO EN VARIAS VARIABLES  
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR  
FECHA : 04 / 12 / 2004

## EXAMEN

1.-

a) Sea  $\mathfrak{R}$  la región de  $R^3$  interior al tetraedro de vértices  $A=(0,0,0)$ ,  $B=(1,0,0)$ ,  $C=(1,1,0)$  y  $D=(1,1,1)$ .  
Se pide:

i) Representar la región gráficamente

ii) Calcular  $\iiint_{\mathfrak{R}} z dx dy dz$

b) Sea  $\mathfrak{R}$  la región de  $R^3$  interior al cilindro con eje de simetría en el eje  $z$  y de radio 1, entre los planos  $z=2$  y  $z=-2$ , y el exterior al cono de ecuación  $z^2=4(x^2+y^2)$ .

Se pide:

i) Representar la región gráficamente

ii) Evaluar la integral  $\iiint_{\mathfrak{R}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , usando coordenadas cilíndricas.

c) Recalcular b) usando ahora coordenadas esféricas.

Indicación: Puede serle útil:

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \frac{-\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2\cos x}{3\sin x} + C$$

2.-

a) Sea  $g : R \rightarrow R$  continua y  $h : R \rightarrow R$  una primitiva de  $g$ .

Se pide:

i) Determinar todas las funciones  $f : R^2 \rightarrow R$  de clase  $C^1$ , soluciones de la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$g(y) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

utilizando las nuevas coordenadas  $u$  y  $v$  definidas por:

$$x = u + h(v) \qquad y = v$$

ii) Utilizar el resultado obtenido para resolver:

$$y \frac{\partial f}{\partial x} + (y^2 + 1) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

b) Demuestre que el cambio de variables definido por:

$$u(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} \text{ y } v(x, y) = \frac{y^2 + x^2}{2} \text{ transforma la ecuación } y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{en: } 2(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial F}{\partial u} - u \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Suponga que las derivadas parciales cruzadas de orden 2 son iguales.

c) Los espirales de Maclaurin corresponden a una familia de curvas en el plano que al ser descritas en coordenadas polares las variables  $r$  y  $\theta$  satisfacen la relación:

$$r(\theta) = a(\sin(n\theta))^{\frac{1}{n}}$$

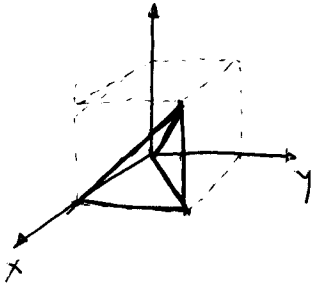
donde  $a > 0$  y  $n \in \mathbb{R} - \{0\}$  corresponde al orden de la espiral. Pruebe que la curvatura de una espiral de Maclaurin de orden  $n$  es:

$$k(\theta) = \frac{n+1}{a} (\sin(n\theta))^{\frac{n-1}{n}}$$

3.- De entre todos los planos que contienen al punto  $(a, b, c)$  situado en el octante positivo, determine aquel que hace mínimo el volumen del tetraedro que forma con los planos coordenados. ¿Cuál es el volumen?

1-

a)



El plano de la cara oblicua tiene ecuación

$$z - y = 0$$

La región queda definida por:

$$0 \leq z \leq y$$

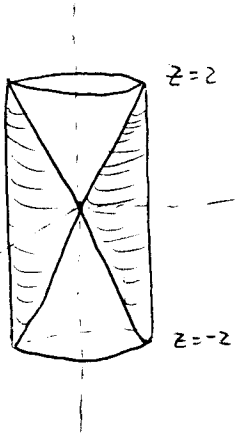
$$0 \leq y \leq x$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Luego

$$\iiint_R z dx dy dz = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y z dz dy dx = \frac{1}{24}$$

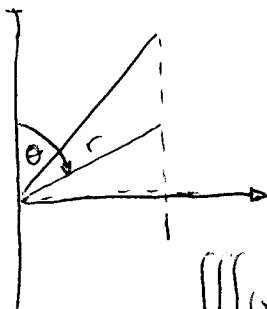
b)



En cilíndricas, aprovecharemos la simetría de la figura y la función a integrar, es decir,

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2r} (r^2 + z^2) r dz dr d\theta = \frac{56\pi}{15}$$

c) Sea  $\theta^* = \arctg(1/2)$



$$r \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}_{\text{sene}} = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\text{sene}}$$

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV = 2 \int_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\text{sene}}} r^2 r^2 \text{sene} \theta dr d\phi d\theta = \frac{56\pi}{15}$$

2-

a)

i)  $u = x - h(y) \quad v = y$

$$f(x, y) = \bar{f}(u, v) = \bar{f}(x - h(y), y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -h'(y) \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}$$

pero  $h'(y) = g(y)$

$$\Rightarrow g(y) \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = 0 \Rightarrow \bar{f}(u, v) = \psi(u)$$

con  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x, y) = \psi(x - h(y))$$

ii) Notemos que  $g(y) = \frac{y}{y^2+1} \Rightarrow h(y) = \frac{1}{2} \ln(y^2+1) + C$

$$\Rightarrow f(x, y) = \psi\left(x - \frac{1}{2} \ln(y^2+1) + K\right) \quad \text{con } \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

b)  $u = \frac{y^2 - x^2}{2} \quad v = \frac{y^2 + x^2}{2}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Análogamente

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

# Examen 2004-2

2. (continuación)

b) reemplazando  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -x$   $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = y$   $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -1$   $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 1$

$$y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (u+v) \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (v-u) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (v-u) - 2(v-u) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right]$$

$$+ (u-v) \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (u+v) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (u+v) + 2(u+v) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right] = 0$$

$$\Rightarrow 4(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - 2v \frac{\partial F}{\partial u} + 2u \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

$$\therefore 2(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial F}{\partial u} - u \frac{\partial F}{\partial v}$$

c) Sea

$$\vec{r}(\theta) = a (\sin(n\theta))^{1/n} (\cos \theta, \sin \theta)$$

la parametrización de la espiral de Maclaurin

$$\vec{r}'(\theta) = \frac{a}{n} (\sin(n\theta))^{1/n-1} \cos(n\theta) \cdot n (\cos \theta, \sin \theta) + a (\sin(n\theta))^{1/n} (-\sin \theta, \cos \theta)$$

$$= a \cos(n\theta) (\sin(n\theta))^{1/n-1} (\cos \theta, \sin \theta) + a (\sin(n\theta))^{1/n} (-\sin \theta, \cos \theta)$$

Luego

$$\|\vec{r}'(\theta)\|^2 = a^2 (\sin(n\theta))^{2/n} \sec^2(n\theta) = a^2 (\sin(n\theta))^{2(1/n)}$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}'(\theta)\| = a (\sin(n\theta))^{1/n}$$

Por lo tanto

$$\hat{T}(\theta) = \frac{\vec{r}'(\theta)}{\|\vec{r}'(\theta)\|} = \frac{a (\sin(n\theta))^{1/n} \{ (-\sin \theta, \cos \theta) + \cot(n\theta) (\cos \theta, \sin \theta) \}}{a (\sin(n\theta))^{1/n}}$$

2c) Examen 2004-2

$$\hat{T}(\theta) = \sin(n\theta) (-\sin\theta, \cos\theta) + \cos(n\theta) (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$= (\cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta, \sin\theta\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\cos\theta)$$

$$= (\cos((n+1)\theta), \sin((n+1)\theta))$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{T}}{d\theta} = (n+1) (-\sin((n+1)\theta), \cos((n+1)\theta))$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\hat{T}}{d\theta} \right\| = n+1$$

$$\Rightarrow K(\theta) = \frac{\left\| \frac{d\hat{T}}{d\theta} \right\|}{\left\| \vec{r}'(\theta) \right\|} = \frac{n+1}{a (\sin(n\theta))^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{n+1}{a} (\sin(n\theta))^{\frac{n-1}{n}}$$

□

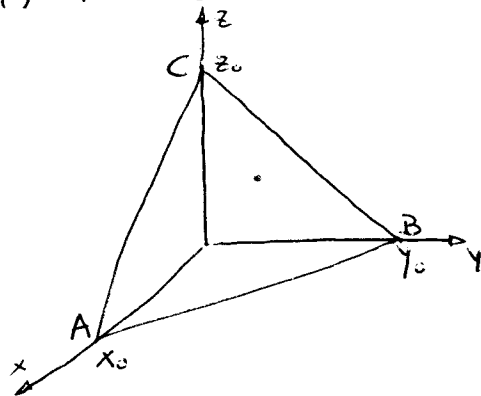
# Examen 2004-2

3- Sea  $\vec{N} = (\alpha, \beta, \gamma)$  el vector normal al plano que contiene al punto  $\vec{P} = (a, b, c)$ .

Luego la ec. de este plano es:  $(\vec{x} - \vec{P}) \cdot \vec{N} = 0$

$$\Rightarrow \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha a + \beta b + \gamma c} \quad (*)$$



El plano \* corta los ejes coordenados en los puntos

$$A = (x_0, 0, 0) \quad B = (0, y_0, 0) \quad C = (0, 0, z_0)$$

donde

$$x_0 = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha}$$

$$y_0 = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\beta}$$

$$z_0 = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\gamma}$$

El volumen del tetraedro es  $V = \frac{x_0 y_0 z_0}{6}$

$$\Rightarrow V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(\alpha a + \beta b + \gamma c)^3}{6 \alpha \beta \gamma}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{6 \alpha \beta \gamma \cdot 3(\alpha a + \beta b + \gamma c)^2 \cdot a - 6 \beta \gamma (\alpha a + \beta b + \gamma c)^3}{(6 \alpha \beta \gamma)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3\alpha a = \alpha a + \beta b + \gamma c \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow 3\beta b = \alpha a + \beta b + \gamma c \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow 3\gamma c = \alpha a + \beta b + \gamma c \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right\} \alpha = \beta \frac{b}{a}$$

$$\gamma = \beta \frac{b}{c}$$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} b/a \\ 1 \\ b/c \end{pmatrix}$$

## Examen 2004-2

3- (Continuación)

Por lo tanto el plano buscado corta los ejes coordenados en:

$$x_0 = 3a \quad y_0 = 3b \quad z_0 = 3c$$

$$\Rightarrow V_{\min} = \frac{x_0 y_0 z_0}{6} = \frac{9}{2} abc$$