

Control # 3

1. a) Determine si las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son convexas:

I) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 + x^t x)^{x^t x}$

II) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n})$

- b) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Se define

$$F(x, y) = f\left(\frac{x^2 - a^2}{y} + y\right)$$

Encuentre f tal que $\forall x, y \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, se tiene que $\Delta F = 0$

2. a) Suponga que hay dos tipos de medios transparentes, separados por una línea gruesa. Dentro del primero (arriba) la velocidad de la luz es $\frac{c}{n_1}$, mientras que en el segundo (abajo) es $\frac{c}{n_2}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Los números n_1 y n_2 son los llamados índices de refracción.

Por simplicidad, supondremos $c = 1$ y $n_2 > n_1$. Dado dos puntos A y B en el medio 1 y 2 respectivamente (como en la figura), donde a, b, c pueden ser considerados fijos, la idea del problema es determinar lo siguiente:

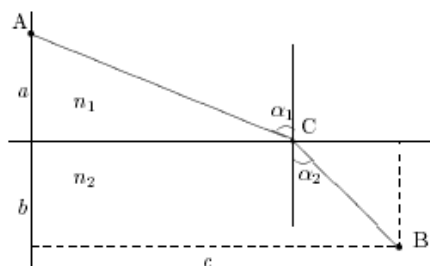
Encontrar la relación entre α_1, α_2, n_1 y n_2 para que el tiempo de viaje entre A y B sea mínimo.

(Lo anterior se conoce como la Ley de Snell)

Para ello:

- i) Plantee el problema como un problema de optimización

- ii) Resolviendo el problema, pruebe que $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$



- b) Determine los máximos y mínimos globales de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$$

sujeto a que $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1$

Justifique su respuesta.

3. Considere el siguiente problema:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & y_n & \cdots & z_n \end{bmatrix} \text{ una matriz cuadrada de } n \times n \text{ con } n^2 \text{ incógnitas.}$$

La idea del problema es encontrar el máximo y mínimo valor de $\text{Det}A$ (determinante de A) sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + \cdots + z_1^2 &= h_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + \cdots + z_2^2 &= h_2^2 \\ &\vdots \\ x_n^2 + y_n^2 + \cdots + z_n^2 &= h_n^2 \end{aligned}$$

con $h_1, h_2, \dots, h_n > 0$.

Para ello se pide:

- a) Pruebe que $\text{Det}A$ puede escribirse como $\text{Det}A = x_i X_i + y_i Y_i + \cdots + z_i Z_i$ donde X_i, Y_i, \dots, Z_i corresponden al determinante de una matriz de $(n-1) \times (n-1)$ con el signo adecuado. Pruebe además que si $i \neq j$ se tiene que $x_j X_i + y_j Y_i + \cdots + z_j Z_i = 0$

Indicación: Calcule el determinante de A por una fila apropiada. Recuerde que si una matriz tiene filas o columnas linealmente dependientes entonces su determinante es nulo.

- b) Plantee el problema como un problema de optimización.

Indicación: Escriba un Lagrangeano apropiado para el problema, notando que $\text{Det}A$ es una función $f: \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$.

- c) Resuelva el problema planteado en (b).

Indicación: Puede serle útil definir $B = A^t A$ y calcular su determinante notando que $\text{Det}A^t A = (\text{Det}A)^2$.

- d) Deduzca que:

$$\left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & y_n & \cdots & z_n \end{bmatrix} \right| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + \cdots + z_i^2)}$$

Desigualdad de Hadamard.

Control #3

1 a)

$$i) f(x_1, \dots, x_n) = (1 + x^t x)^{x^t x} = e^{\ln f(x)} = e^{x^t x \ln(1 + x^t x)}$$

Luego si $g(x) = x^t x \ln(1 + x^t x)$ es convexa entonces $e^{g(x)}$ es convexa

Sea $h(x) = x^t x$ claramente convexa. Se tiene que

$$g(x) = (r \circ h)(x) \quad \text{con} \quad r(y) = y \ln(1 + y)$$

es convexa si $r(y)$ es creciente y convexa para $y \geq 0$

En efecto.

$$\left. \begin{aligned} r'(y) &= \frac{y}{1+y} + \ln(1+y) > 0 \\ r''(y) &= \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)} > 0 \end{aligned} \right\} \text{creciente y convexa}$$

Por lo tanto.

$g(x) = x^t x \ln(1 + x^t x)$ es convexa

$$\Rightarrow e^{g(x)} = (1 + x^t x)^{x^t x} \text{ es convexa}$$

Control #3

1 a)

$$ii) f(x_1, \dots, x_n) = \ln\left(\sum_{k=1}^n e^{x_k}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{e^{x_i}}{\sum_k e^{x_k}} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \begin{cases} \frac{e^{x_i} e^{x_j}}{(\sum_k e^{x_k})^2} & i \neq j \\ \frac{e^{x_i} (\sum_k e^{x_k} - e^{x_i})}{(\sum_k e^{x_k})^2} & i = j \end{cases}$$

$$\text{Sea } h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

$$h^t H_f h = \frac{1}{(\sum_k e^{x_k})^2} \left[\sum_i e^{x_i} (\sum_k e^{x_k} - e^{x_i}) h_i^2 + \sum_i \sum_j e^{x_i} h_i e^{x_j} h_j - \sum_i (e^{x_i} h_i)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{(\sum_k e^{x_k})^2} \left(\sum_k e^{x_k} \sum_i e^{x_i} h_i^2 - 2 \sum_i (e^{x_i} h_i)^2 + (\sum_i e^{x_i} h_i)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{(\sum_k e^{x_k})^2} \left(\sum_k e^{x_k} \sum_i e^{x_i} h_i^2 - (\sum_i e^{x_i} h_i)^2 \right)$$

$$\text{Sea } z = (z_1, \dots, z_n) = (e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n})$$

$$= \frac{1}{(\sum_k z_k)^2} \left(\sum_i z_i \sum_i z_i h_i^2 - (\sum_i z_i h_i)^2 \right)$$

Pero la desigualdad de Cauchy-Schwartz $\Rightarrow (x^t y)^2 \leq x^t x \cdot y^t y$

$$\text{Sea } x_i = h_i \sqrt{z_i} \quad y_i = \sqrt{z_i}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_i h_i z_i \right)^2 \leq \sum_i z_i h_i^2 \cdot \sum_i z_i$$

$$\Rightarrow \left[\sum_i z_i \cdot \sum_i z_i h_i^2 - (\sum_i z_i h_i)^2 \right] \geq 0$$

Luego

$$h^t H_f h \geq 0$$

Por lo tanto

$f = \ln(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$ es
convexa

Control 3

1-

b) $F(x,y) = f\left(\frac{x^2-a^2}{y} + y\right) \quad a \neq 0$

$$\text{Sea } u = \frac{x^2-a^2}{y} + y$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + f'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + f'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\text{pero } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - \frac{(x^2-a^2)}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-a^2)}{y^3}$$

$$\Delta F = 0$$

$$\Rightarrow f''(u) \left[\underbrace{y^2 + 2(x^2-a^2) + \frac{(x^2-a^2)^2}{y^2}}_{u^2 + 4a^2} \right] + f'(u) \left[\underbrace{2 \left(y + \frac{(x^2-a^2)}{y} \right)}_{2u} \right] = 0$$

Luego la ec. queda

$$f''(u) (u^2 + 4a^2) + 2u f'(u) = 0$$

$$\Rightarrow f'(u) = \frac{C}{u^2 + 4a^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(u) = \frac{A}{2a} \arctg\left(\frac{u}{2a}\right) + B}$$

Control #3

2- a) velocidad medio 1 = $\frac{1}{n_1}$ velocidad medio 2 = $\frac{1}{n_2}$

Minimizar $\frac{\frac{a}{\cos \alpha_1}}{\frac{1}{n_1}} + \frac{\frac{b}{\cos \alpha_2}}{\frac{1}{n_2}} = \frac{a n_1}{\cos \alpha_1} + \frac{b n_2}{\cos \alpha_2}$

sa. $a \operatorname{tg} \alpha_1 + b \operatorname{tg} \alpha_2 = c$

$L(d_1, d_2, \lambda) = \frac{a n_1}{\cos \alpha_1} + \frac{b n_2}{\cos \alpha_2} + \lambda (a \operatorname{tg} \alpha_1 + b \operatorname{tg} \alpha_2 - c)$

$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = \frac{a n_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\lambda a}{\cos^2 \alpha_1} = 0 \Rightarrow -\lambda = n_1 \operatorname{sen} \alpha_1$

$\frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = \frac{b n_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2} + \frac{\lambda b}{\cos^2 \alpha_2} = 0 \Rightarrow -\lambda = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2$

$\therefore \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$

b) $f(x, y, z) = z x^2 + y^2 + z^2 - x y$ $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1$

Como f es continua y la región es un compacto, entonces f alcanza sus máximos y mínimos en el conjunto.

Veamos el interior

$\nabla f(x, y, z) = (4x - y, zy - x, 2z)$

$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ zy - x = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ es punto crítico}$ $f(0, 0, 0) = 0$ $H_f = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ def. positiva

$\Rightarrow (0, 0, 0)$ es mínimo global.

con $f(0, 0, 0) = 0$

Control #3

2-

b) (Continuación)

Estudiamos el borde.

$$L = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy - \lambda \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x - y - \lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - x - \lambda \frac{y}{2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda \frac{z}{4} = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1$$

$$\Rightarrow 8z - \lambda z = 0 \Rightarrow z(8 - \lambda) = 0$$

$$\text{Si } z \neq 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

$$\begin{array}{l} 4x - y - 8x = 0 \\ -x + 2y - 4y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -4x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{array} \Rightarrow x = y = 0$$

Luego

$$\frac{z^2}{8} = 1 \Rightarrow z^2 = 8 \Rightarrow z = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

$(0, 0, 2\sqrt{2})$ y $(0, 0, -2\sqrt{2})$ son puntos críticos

↓

$$f(0, 0, 2\sqrt{2}) = 8$$

↓

$$f(0, 0, -2\sqrt{2}) = 8$$

Si $z = 0$

$$\begin{array}{l} 4x - y - \lambda x = 0 \\ 2y - x - \lambda \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x^2 = y^2 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{2x^2}{4} = 1 \\ \boxed{x^2 = 1} \Rightarrow \boxed{y^2 = 2} \end{array}$$

Por lo tanto son puntos críticos

$$(1, \sqrt{2}, 0) \rightarrow f = 4 - \sqrt{2}$$

$$(1, -\sqrt{2}, 0) \rightarrow f = 4 + \sqrt{2}$$

$$(-1, \sqrt{2}, 0) \rightarrow f = 4 + \sqrt{2}$$

$$(-1, -\sqrt{2}, 0) \rightarrow f = 4 - \sqrt{2}$$

Por lo tanto los extremos de f son:

Mínimo $(0, 0, 0)$ con $f(0, 0, 0) = 0$

Máximos $(0, 0, \pm 2\sqrt{2})$ con $f(0, 0, \pm 2\sqrt{2}) = 8$

Control #3

3-

a)

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ x_2 & y_2 & & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & y_n & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

Sea $\Delta = |A|$ y Δ_{ij} : Determinante de la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A .

Calculando el determinante por la i -ésima fila queda

$$\Delta = x_i \Delta_{i1} - y_i \Delta_{i2} + \dots + z_i (-1)^{n+1} \Delta_{in}$$

Por lo tanto

$$\Delta = x_i X_i + y_i Y_i + \dots + z_i Z_i \quad \text{notemos que } X_i, Y_i, Z_i \text{ no dependen de las variables } x_i, y_i, \dots, z_i$$

Si $i \neq j$ entonces

$x_j X_i + y_j Y_i + \dots + z_j Z_i$ corresponde al determinante de la matriz siguiente calculado por la i -ésima fila.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ x_2 & y_2 & & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_j & y_j & & z_j \rightarrow \text{fila } i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_j & y_j & & z_j \rightarrow \text{fila } j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & y_n & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

Como la matriz tiene 2 filas iguales, entonces el determinante es nulo. Luego

$$x_j X_i + y_j Y_i + \dots + z_j Z_i = 0$$

b) El problema de optimización tiene el siguiente Lagrangeano

$$L = x_i X_i + y_i Y_i + \dots + z_i Z_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^2 + y_i^2 + \dots + z_i^2 - h_i^2)$$

c) Derivando el Lagrangeano e igualando a cero se tiene que

$$X_i + 2\lambda_i x_i = Y_i + 2\lambda_i y_i = \dots = Z_i + 2\lambda_i z_i = 0$$

Control #3

3-

c) (continuación)

En el óptimo $x_i, y_i, \dots, z_i, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ se cumple que

$$\frac{x_i}{X_i} = \frac{y_i}{Y_i} = \dots = \frac{z_i}{Z_i} = -\frac{1}{2\lambda_i}$$

claramente si $\lambda_i = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ por lo tanto no lo consideraremos

Calculemos el valor del determinante Δ en el óptimo. Usando la indicación tenemos que

$$B = A^t A \Rightarrow |B| = |A|^2 \Rightarrow \Delta = |A| = \sqrt{|B|}$$

Veamos un elemento cualquiera de la matriz $B = (b_{ij})$

$$b_{ij} = x_i x_j + y_i y_j + \dots + z_i z_j = -\frac{1}{2\lambda_i} (x_j X_i + y_j Y_i + \dots + z_j Z_i)$$

$$= \begin{cases} h_i^2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{por lo visto en la parte a))}$$

Luego

$$B = \begin{bmatrix} h_1^2 & & 0 \\ & h_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & h_n^2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \prod_{i=1}^n h_i^2$$

$$\text{Como } \Delta^2 = \prod_{i=1}^n h_i^2 \Rightarrow \Delta = \pm \sqrt{\prod_{i=1}^n h_i^2}$$

Luego como los valores son los extremos de Δ entonces

$$-\sqrt{\prod_{i=1}^n h_i^2} \leq \Delta \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n h_i^2} \Rightarrow \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ x_2 & y_2 & & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & y_n & & z_n \end{bmatrix} \right| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + \dots + z_i^2)}$$

"Desigualdad de Hadamard".