

## Problemas Propuestos Función Implícita

① Sea  $F(x_1, x_2, y) = y^2 \cos(x_1 + y) - \sin^2(x_2 + y) = 0$

... Encontrar un punto que satisfaga las hipótesis del teorema y calcular

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \text{ y } \frac{\partial y}{\partial x_2} \text{ en dicho punto.}$$

② Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dado  $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y} - 1$

Compruebe que de acuerdo al Teorema de la función implícita, no se puede despejar  $y$  en función de  $x$  en torno al origen.

③ Sea  $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(u, v, w, x, y) = \begin{pmatrix} uvw + x + y + 2 \\ ux - vy + w^2 \end{pmatrix}$

Muestre que se puede despejar  $(x, y)$  en términos de  $(u, v, w)$  en torno a  $(u_0, v_0, w_0) = (1, 2, 3)$

④ Considere el sistema

$$y^2 + 2 \cos(u \cdot v) + 3 \operatorname{arctg}(z) \ln x = 8$$

$$u + e^{vy} + 14 \sinh(z^{xy} \cdot u \cdot v) = u \cdot v$$

¿ Se puede despejar  $u$  y  $v$  en función de las variables  $x, y, z$  en torno a  $(1, 0, 0, \frac{\pi}{2}, 1)$  ?

⑤ Dado

$$xy + yz + xyzv + v^3 = 0$$

$$xz + y^2 + z - v^2 = 0$$

Muestre que el T.F.I no permite asegurar que es posible despejar  $(z, v)$  en función de  $(x, y)$  en torno a  $(-1, 1, 1, 1)$ .

⑥ Para las siguientes funciones compruebe que se satisfacen las hipótesis del T.F.I en el punto indicado. Obtenga la derivada de  $y = f(x)$  en el punto dado.

a)  $F(x, y) = x^2 y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0$  en  $(1, 1)$

b)  $F(x, y) = \sin x + \cos y + 2y - \pi = 0$  en  $(0, \pi/2)$

c)  $F(x, y) = y \ln(x^2 + y^2) - 2xy = 0$  en  $(0, 1)$

d)  $F(x, y) = x^y + y^x - 2xy = 0$  en  $(2, 2)$

⑦ Pruebe que en las sgtes funciones se comprueban las hipótesis del TFI de manera que  $y = f(x_1, x_2)$  en una vecindad del punto indicado. Calcule las derivadas parciales de  $f$  en dicho punto.

a)  $F(x_1, x_2, y) = x_1 \sin^2 x_2 + x_1 - 3x_2 + y = 0$  en  $(0, 0, 0)$

b)  $F(x_1, x_2, y) = x_1 \ln(1+x_2) + y e^{4y} = 0$  en  $(0, 0, 0)$

c)  $F(x_1, x_2, y) = x_1 x_2 y e^y \ln y - 3x_1 + 3x_2 = 0$  en  $(1, 1, 1)$

d)  $F(x_1, x_2, y) = y \arctg(1-y^2) + 3x_1 + 5y - 8x_2^3 = 0$  en  $(1, 1, 1)$

⑧ Suponga que la expresión  $F(\phi(x), \psi(x), y^3) = 0$  donde  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$\phi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones de clase  $C^1$ . Pruebe que se define implícitamente una función diferenciable  $y = f(x)$ . Determine  $f'(x)$

⑨ Suponga que la expresión  $F(x, y, z) = 0$  determina implícitamente funciones diferenciables  $x = x(y, z)$ ,  $y = y(x, z)$ ,  $z = z(x, y)$ . Demuestre que

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

⑩ Suponga que la expresión

$$\int_{x-z}^{x+z} g(t) dt + \int_{3x+y}^{z^2} h(t) dt = 0$$

donde  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas, definen implícitamente  $z = f(x, y)$ . Determine  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

⑪ Considere las expresiones

$$x \sin y + y \sin x = u \sin v + v \sin u$$

$$x \cos y + y \cos x = u \cos v + v \cos u$$

Compruebe que alrededor del punto  $(x, y, u, v) = (0, 1, 0, 1)$  estas expresiones determinan funciones de clase  $C^1$   $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$

Halle las derivadas parciales de estas funciones en el punto indicado

Considere  $\phi, \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$\phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \quad \psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Escriba las matrices jacobianas  $J\phi(0, 1)$   $J\psi(0, 1)$  y determine

$$J\phi(0, 1) \cdot J\psi(0, 1) \quad \text{y} \quad J\psi(0, 1) J\phi(0, 1)$$