

CURSO: MA22A CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 01 / 10 / 2004

EJERCICIO #2

1.-

a) Sea $F(x, y) = f(f(x, y), f(x, y))$, donde se supone que f es una función diferenciable en R^2 . Se le pide a un alumno de un semestre anterior que aplique la regla de la cadena para calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ obteniendo lo siguiente:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

¿Está de acuerdo? Justifique.

Ahora, compruebe la igualdad anterior para $f(x, y) = x^2 + 3xy$. ¿Funciona la fórmula obtenida?. Justifique.

b) Sea $f: R^2 \rightarrow R$ diferenciable y $g: R^3 \rightarrow R^2$, con $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ donde:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z$$

Si $h = f \circ g$, demuestre que:

$$\|\nabla h\|_2^2 = 4 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 g_1 + 4 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} g_2 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2$$

2.- Dada una curva C se define la evoluta de C como el lugar geométrico de sus centros de curvatura. Sea Γ la hélice circular de parametrización:

$$\vec{S}(\mathbf{q}) = (a \cos \mathbf{q}, a \sin \mathbf{q}, \frac{h}{2p} \mathbf{q})$$

donde $\mathbf{q} \in R$ $a \in R$ $a \neq 0$

Pruebe que la evoluta de la hélice Γ es una hélice con la misma generatriz y el mismo paso.

Solución Ejercicio 2

1. a) La expresión es errónea, ya que no toma en cuenta donde son evaluadas las derivadas parciales de la función f . La expresión correcta es:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(f(x, y), f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(f(x, y), f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Verifiquemos para $f(x, y) = x^2 + 3xy$ luego:

$$F(x, y) = f(x^2 + 3xy, x^2 + 3xy) = 4x^4 + 36x^2y^2 + 24x^3y \implies \frac{\partial F}{\partial x} = 16x^3 + 72xy^2 + 72x^2y$$

Usando la fórmula anterior se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + 3xy, x^2 + 3xy) = 5(x^2 + 3xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 + 3xy, x^2 + 3xy) = 3(x^2 + 3xy)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 5(x^2 + 3xy) \cdot (2x + 3y) + 3(x^2 + 3xy) \cdot (2x + 3y) = 16x^3 + 72xy^2 + 72x^2y$$

- b) Como g_1 y g_2 son diferenciables, podemos aplicar regla de la cadena, luego:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2z + \frac{\partial f}{\partial y}$$

Luego

$$\|\nabla h\|_2^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2$$

$$\|\nabla h\|_2^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 4x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 4x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}\right) \right] + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 4y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 4y \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}\right) \right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 4z^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 4x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}\right) \right]$$

$$\|\nabla h\|_2^2 = 4 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (x^2 + y^2 + z^2) + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 4 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}\right) (x + y + z)$$

$$\|\nabla h\|_2^2 = 4 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 g_1 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 4 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}\right) g_2$$

2.

$$evo(\Gamma) = \vec{\sigma}(\theta) + \frac{1}{K(\theta)} \hat{N} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Calculamos el vector tangente a la curva

$$\vec{\sigma}'(\theta) = (-a \sin \theta, a \cos \theta, \bar{h}) \quad \text{donde } \bar{h} = \frac{h}{2\pi}$$

$$\|\vec{\sigma}'(\theta)\| = \sqrt{a^2 + \bar{h}^2}$$

Por lo tanto el vector tangente unitario es:

$$\hat{T}(\theta) = \frac{\vec{\sigma}'(\theta)}{\|\vec{\sigma}'(\theta)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \bar{h}^2}} (-a \sin \theta, a \cos \theta, \bar{h})$$

Derivamos para calcular el vector normal

$$\hat{T}' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \bar{h}^2}} (-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0)$$

$$\|\hat{T}'\| = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + \bar{h}^2}}$$

$$\hat{N} = \frac{a}{|a|} (-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$$

La curvatura la obtenemos de:

$$K(\theta) = \frac{\|\hat{T}'\|}{\|\vec{\sigma}'\|} = \frac{|a|}{a^2 + \bar{h}^2}$$

Reemplazando en la fórmula de la evoluta se tiene:

$$evo(\Gamma) = (a \cos \theta, a \sin \theta, \bar{h} \theta) - \frac{a^2 + \bar{h}^2}{|a|} \frac{|a|}{a} (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \left(-\frac{\bar{h}^2}{a} \cos \theta, -\frac{\bar{h}^2}{a} \sin \theta, \bar{h} \theta\right)$$

Que corresponde a una hélice que comparte el eje y tiene el mismo paso de la hélice original.