

CURSO: MA22A CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 22 / 09 / 2004

## CONTROL #2

1.-

a) Sean  $f, g : R \rightarrow R$  funciones dos veces derivables. Se define la función:

$$z = xf(x+y) + yg(x+y)$$

Determine el valor de:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Diga donde están evaluadas las derivadas parciales.

b) Sea  $f : R^2 \rightarrow R$  diferenciable tal que verifica la ecuación diferencial:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = a \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{donde } a \in R$$

Obtenga la ecuación diferencial que satisface  $g : R^2 \rightarrow R$  definida por:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = f(\mathbf{r} \cos \mathbf{q}, \mathbf{r} \sin \mathbf{q})$$

c) Sean  $\mathbf{j}, \mathbf{y} : R \rightarrow R$  funciones dos veces diferenciables. Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{donde } z = x\mathbf{j}(y/x) + \mathbf{y}(y/x)$$

2) Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y direccionales, y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

$$\text{i.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + xy + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{ii.} \quad f(x, y) = \begin{cases} (3x^2 - 2y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}\right) & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{iii.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

3.- Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Demostrar que  $f$  es diferenciable en  $a \in \mathbb{R}^n$  si y sólo si, existe una función  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua en  $a$ , tal que:

$$f(x) - f(a) = \langle g(x), x - a \rangle$$

Indicación: Recuerde que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $a \in \mathbb{R}^n$ , si:

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + e(h)$$

donde  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(h)}{\|h\|_2} = 0$

Además use el cambio de variable  $x=a+h$  y note que  $\langle x-a, x-a \rangle = \|x-a\|_2^2$

La siguiente igualdad puede serle útil también:

$$f(x) - f(a) = \|x-a\| \left\langle g(x) - g(a), \frac{x-a}{\|x-a\|} \right\rangle + \langle g(a), x-a \rangle$$

# Control #2 2004-2

1-

$$a) \quad z = x f(x+y) + y g(x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f + x f' + y g' \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x f' + g + y g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f' + f' + x f'' + y g'' = x f'' + y g'' + 2f'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x f'' + g' + g' + y g'' = x f'' + y g'' + 2g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f' + x f'' + g' + y g'' = f' + x f'' + g' + y g''$$

Luego

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2-2)f' + (2-2)g' + (x-2x+x)f'' + (y+y-2y)g'' = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$b) \quad g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \Rightarrow f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(y/x))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

Luego

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho \cos \theta \left[ \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right] + \rho \sin \theta \left[ \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right] = \alpha \cdot \rho$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho} = \alpha \cdot \rho \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \rho} = \alpha}$$

## Control #2 2004-2

1-

$$c) \quad z = x \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi - \frac{y}{x} \varphi' - \frac{y}{x^2} \psi' \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi' + \frac{1}{x} \psi'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3} \varphi'' + \frac{y^2}{x^4} \psi'' + \frac{2y}{x^3} \psi'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x} \varphi'' + \frac{1}{x^2} \psi''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2} \varphi'' - \frac{y}{x^3} \psi'' - \frac{1}{x^2} \psi'$$

Luego

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

2-

$$i) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + xy + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Derivada direccional: Sea  $d = (\cos \theta, \sin \theta)$ 

$$\begin{aligned} f'(0, d) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0+td) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4(\cos^4 \theta - \sin^4 \theta)}{t^2 \cos^2 \theta + t^2 \sin \theta \cos \theta + t^2 \sin^2 \theta} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot \frac{\cos^4 \theta - \sin^4 \theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta} = 0 \end{aligned}$$

 $\therefore f$  admite derivada direccional en 0 para toda direcci3n.Derivadas parciales: De lo anterior  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ 

Diferenciabilidad:

Como las derivadas parciales existen en el origen, basta probar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1^4 - h_2^4}{\frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}} = 0.$$

Haciendo el cambio a polares se tiene

$$\left| \frac{r^4(\cos^4 \theta - \sin^4 \theta)}{r^3(\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta)} \right| = r \left| \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta + 1} \right|$$

Pero  $1 + \cos \theta \sin \theta$  no se anula en  $[0, 2\pi]$ 

$$\text{Luego } \left| \frac{r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{1 + \cos \theta \sin \theta} \right| < M \cdot r < M \delta < \varepsilon$$

 $\therefore f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ . Por lo tanto es continua en  $(0, 0)$

# Control #2 2004-2

2- iii) 
$$f(x,y) = \begin{cases} (3x^2 - 2y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivada direccional: Sea  $d = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(3t^2 \cos^2\theta - 2t^2 \sin^2\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2t^2 \cos^2\theta + 3t^2 \sin^2\theta}}\right)}{t} = 0$$

$f$  admite  $f'(0,d)$  para toda dirección

Derivadas Parciales: Como  $f'(0,d) = 0 \forall d$  entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Diferenciabilidad:  $f$  es diferenciable en  $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\left| \frac{(3h_1^2 - 2h_2^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2h_1^2 + 3h_2^2}}\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \frac{3(h_1^2 + h_2^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 3\sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 3\|h\|_2 < 3\delta < \varepsilon$$

Luego  $f$  es continua en  $(0,0)$

iii) 
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f$  no es continua en  $(0,0)$ . Basta tomar la trayectoria  $y = x^3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2} \quad \text{Por lo tanto } f \text{ no es diferenciable en } (0,0)$$

## Control # 2 2004-2

2-

iii) Derivadas direccionales: Sea  $d = (\cos \theta, \sin \theta)$

$$f'(0, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{\frac{t^6 \cos^6 \theta + t^2 \sin^2 \theta}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \frac{\cos^3 \theta \sin \theta}{t^4 \cos^6 \theta + \sin^3 \theta} = 0$$

Derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

3- P.D.Q

$f$  diferenciable en  $a \in \mathbb{R}^n \iff \exists g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua en  $a$  tal que

$$f(x) - f(a) = \langle g(x), x-a \rangle$$

$\Rightarrow$  Si  $f$  es diferenciable en  $a$  entonces

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \varepsilon(h)$$

donde  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_2} = 0$ . Sea  $h = x-a$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle + \varepsilon(x-a) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varepsilon(x-a)}{\|x-a\|_2} = 0$$

Sea  $\varepsilon_1(x-a) = \frac{\varepsilon(x-a)}{\|x-a\|}$

$$\Rightarrow f(x) - f(a) = \langle \nabla f(a), x-a \rangle + \varepsilon_1(x-a) \cdot \|x-a\| \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x-a) = 0$$

$$f(x) - f(a) = \left\langle \underbrace{\nabla f(a) + \frac{\varepsilon_1(x-a)}{\|x-a\|} (x-a)}_{g(x)}, x-a \right\rangle$$

Sea

$$g(x) = \begin{cases} \nabla f(a) + \frac{\varepsilon_1(x-a)}{\|x-a\|} (x-a) & x \neq a \\ \nabla f(a) & x = a \end{cases}$$

Basta probar que  $g$  es continua en  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} \|g(x) - g(a)\| = \lim_{x \rightarrow a} \left\| \nabla f(a) + \frac{\varepsilon_1(x-a)}{\|x-a\|} (x-a) - \nabla f(a) \right\|$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\| \frac{\varepsilon_1(x-a)}{\|x-a\|} (x-a) \right\| = \lim_{x \rightarrow a} \|\varepsilon_1(x-a)\| = 0 \quad \therefore g(x) \text{ es continua en } a.$$



3-

 $\Leftrightarrow$  Sea  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $a$  tal que

$$f(x) - f(a) = \langle g(x), x-a \rangle$$

Probamos que  $f$  es diferenciable en  $a$ .

Por la indicación tenemos que

$$f(x) - f(a) = \|x-a\| \left\langle g(x) - g(a), \frac{x-a}{\|x-a\|} \right\rangle + \langle g(a), x-a \rangle$$

Probamos que

$$f(x) - f(a) = \langle \nabla f(a), x-a \rangle + \varepsilon_1(x-a) \|x-a\| \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x-a) = 0$$

Identificando términos, sea  $\varepsilon_1(x-a) = \left\langle g(x) - g(a), \frac{x-a}{\|x-a\|} \right\rangle$ Basta probar que  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x-a) = 0$ 

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x-a) = \lim_{x \rightarrow a} \left\langle g(x) - g(a), \frac{x-a}{\|x-a\|} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow a} \|g(x) - g(a)\| \cdot \frac{\|x-a\|}{\|x-a\|}$$

Pero  $g$  es continua en  $a$ 

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \|g(x) - g(a)\| = 0$$

 $\therefore f$  es diferenciable en  $a$  con  $\nabla f(a) = g(a)$ 

□