

**Clase 02/09/2004**

1. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \|x\|_p \text{ con } p \geq 1$$

- a) Analizar la diferenciabilidad de  $f$  en  $(0,0)$ .
- b) Para que direcciones  $f$  admite derivada direccional en  $(0,0)$ ? Comente.
- c) Comente que sucede en (a) y (b) si  $f(x) = \|x\|_\infty$ .

2. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Determinar en que direcciones existe la derivada direccional de  $f$  en  $(0,0)$ .
- b) Sea  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$\lambda(t) = \begin{cases} (t, t^2 \sin(\frac{1}{t}))^t & \text{si } t \neq 0 \\ (0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Muestre que  $\lambda(t)$  es diferenciable en  $t = 0$

- c) Encuentre las derivadas parciales de  $f$  donde existan.
  - d) Estudie la diferenciabilidad de  $(f \circ \lambda)$  en  $t = 0$ . Concluya acerca de la diferenciabilidad de  $f$  en  $(0,0)$ .
3. Sean  $f_1, \dots, f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables. Sea  $\Omega = (a, b) \times \dots \times (a, b) \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$$

Demuestre que  $f$  es diferenciable en  $\Omega$  y que

$$Df(x) \cdot h = \sum_{i=1}^n f'_i(x_i) h_i$$

4. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad de la función en todo su dominio.
- b) Determine las derivadas parciales de  $f$  donde existan.
- c) Analice la continuidad de las derivadas parciales en  $(0,0)$ .
- d) Analice la diferenciabilidad de  $f$  en  $(0,0)$ .

5. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + \sin(y^4)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad de  $f$  en todo su dominio.
- b) Estudie la diferenciabilidad de  $f$  en todo su dominio.
- c) Estudie la continuidad de las derivadas parciales de  $f$  en todo su dominio.