

CURSO: MA22A CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 27 / 08 / 2004

EJERCICIO #1

1.- Analice la existencia de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$ de las siguientes funciones:

i. $f(x, y) = \frac{xy^{3/2}}{x^2 + y^3}$

ii. $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

iii. $f(x, y) = \frac{e^{-(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|})}}{|y| + e^{\frac{1}{|x|}}}$

iv. $h(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

Recuerde que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$

2.- Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

a) (4 puntos) Calcule y dibuje las curvas de nivel de f .

b) (2 puntos) Utilizando las curvas de nivel calculadas en a) pruebe que no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

PAUTA EJERCICIO #1

1.-

i.- El límite no existe. Basta tomar las trayectorias

$$x = 0 \quad y = y \Rightarrow \text{Lim} = 0$$

$$x^2 = y^3 \Rightarrow \text{Lim} = \frac{1}{2}$$

ii.- El límite es 0.

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} \right| = x^2 + y^2 < \mathbf{d} < \mathbf{e}$$

iii.- El límite es 0.

$$\left| \frac{e^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}\right)}}{|y| + e^{\frac{1}{|x|}}} \right| \leq \left| \frac{e^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}\right)}}{e^{\frac{1}{|x|}}} \right| < e^{-\left(\frac{2}{|x|} + \frac{1}{|y|}\right)} < e^{-\left(\frac{3}{\|x\|_\infty}\right)} < e^{-\left(\frac{3}{\mathbf{d}}\right)} < \mathbf{e}$$

Si $\mathbf{e} \geq 1$ basta que $\mathbf{d} > 0$ para satisfacer la relación

$$\text{Si } \mathbf{e} < 1 \text{ elegimos } \mathbf{d} = \frac{-\text{Ln}(\mathbf{e})}{3}$$

iv.- El límite es 0.

$$\text{Como } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists \mathbf{s} > 0 / |z| < \mathbf{s} \rightarrow \left| \frac{1 - \cos z}{z^2} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2 y \frac{1 - \cos x}{x^2} - xy^2 \frac{1 - \cos y}{y^2}}{x^2 + y^2} \right| < \left| \frac{x^2 |y| - |x| y^2}{x^2 + y^2} \right| < |x| + |y| < \mathbf{d}$$

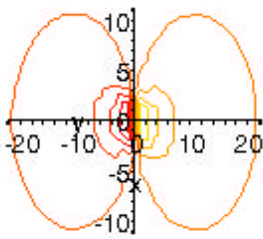
Dado $\mathbf{e} > 0$ basta elegir $\mathbf{d} < \text{Min}\{\mathbf{s}, \mathbf{e}\}$

2.-

a)

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = k$$

$\frac{x}{k} = x^2 + y^2 \Rightarrow (x - \frac{1}{2k})^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2k}\right)^2$ Por lo tanto, para $k \neq 0$ las curvas de nivel son circunferencias con centro $(\frac{1}{2k}, 0)$ y radio $\left|\frac{1}{2k}\right|$, excluyendo el origen. Si $k = 0 \Rightarrow x = 0$ y $y \neq 0$, es decir el eje y excluyendo el origen.



b) Notemos que todas las circunferencias pasan por el origen. Se tiene que

$$(x - h)^2 + y^2 = h^2 \text{ para un } k = \frac{1}{2h} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2xh$$

Luego el límite para la trayectoria por la circunferencia de radio h vale $\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{2xh} = \frac{1}{2h}$ que depende del radio de la circunferencia, luego el límite no existe.