

ANEXO (A)

CÁLCULO II

(Fórmulas y Notas Complementarias)

1. Algunas nociones sobre topología

Definición de distancia. Sean $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. La aplicación

$$d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$$

definida de la siguiente forma

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

se denomina distancia euclídea y verifica las siguientes propiedades:

- 1) $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$.
- 2) $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$.
- 3) $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbf{R}^n$ (*desigualdad triangular*).

Definición de bola abierta. Sean $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ y $r > 0$. Se denomina bola abierta de centro \bar{a} y radio $r > 0$ al conjunto

$$B(\bar{a}, r) = \{\bar{x} \in \mathbf{R}^n / d(\bar{x}, \bar{a}) < r\}.$$

En el caso de $n = 2$ se trata de un círculo de centro a y radio r y en el de $n = 3$ se trata de una esfera de centro a y radio r .

Definición de bola cerrada. Sean $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ y $r > 0$. Se denomina bola cerrada de centro \bar{a} y radio $r > 0$ al conjunto

$$B(\bar{a}, r) = \{\bar{x} \in \mathbf{R}^n / d(\bar{x}, \bar{a}) \leq r\}.$$

Definición de entorno. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. Un subconjunto $E \subset \mathbf{R}^2$ es un entorno de \bar{a} , si existe una bola abierta de centro \bar{a} contenida en E .

Definición de entorno reducido. Sea E un entorno del punto $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. Se denomina entorno reducido de \bar{a} al conjunto $E - \{\bar{a}\}$.

Ejemplo. $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / 0 < x^2 + y^2 < 1\} = B(\bar{0}, 1) - \{\bar{0}\}$.

Complementario de un conjunto. Dado un conjunto U y un subconjunto $A \subset U$, se denomina complementario de A en U al conjunto, que denotaremos por A^C , contenido en U tal que $A \cup A^C = U$ y $A \cap A^C = \emptyset$.

CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE UN CONJUNTO:

Definición de punto interior. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. Se dice que \bar{a} es un punto interior de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, si existe un $r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \subset A$.

Se denomina *interior* de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ al conjunto, que denotamos \mathring{A} , formado por todos los puntos interiores de A .

Definición de punto exterior. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. Se dice que \bar{a} es un punto exterior de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, si es interior del complementario de A (A^C), es decir, $\exists B(\bar{a}, r) \subset A^C$ y tal que $B(\bar{a}, r) \cap A = \emptyset$.

Se denomina *exterior de un conjunto* A al conjunto, que denotamos $Ext A$, formado por todos los puntos exteriores de A .

Definición de punto frontera. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. Se dice que \bar{a} es un punto frontera de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ si, $\forall r > 0$, $B(\bar{a}, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(\bar{a}, r) \cap A^C \neq \emptyset$.

Se llama *conjunto frontera de* A a todos los puntos frontera de A y se denotará $F_r A$.

Estos puntos no son ni interiores ni exteriores (los rodean puntos de A y de A^C).

Definición de punto de adherencia. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. Se dice que \bar{a} es un punto de adherencia de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ si, $\forall r > 0$, se tiene que $B(\bar{a}, r) \cap A \neq \emptyset$.

Al conjunto de todos los puntos de adherencia del conjunto A se le denomina *adherencia del conjunto* A y se denotará \bar{A} .

Los puntos interiores y los puntos de frontera son puntos de adherencia.

Definición de punto de acumulación. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. Se dice que \bar{a} es un punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ si, $\forall r > 0$, se tiene que $(B(\bar{a}, r) - \{\bar{a}\}) \cap A \neq \emptyset$.

Al conjunto de todos los puntos de acumulación del conjunto A se le denomina *derivado del conjunto* A y se denota A' .

Definición de punto aislado. Sea $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. Se dice que \bar{a} es un punto aislado de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ si $\exists r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \cap A = \{\bar{a}\}$.

Definición de conjunto abierto. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, se dice que es un conjunto abierto si todos sus puntos son interiores.

Definición de conjunto cerrado. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, se dice que es un conjunto cerrado si su complementario es abierto.

Definición de conjunto denso. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, si $\bar{A} = \mathbf{R}^n$, se dice que es

un conjunto denso en \mathbf{R}^n .

Definición de conjunto acotado. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, si existe una bola de centro \bar{a} y radio r tal que $A \subset B(\bar{a}, r)$, se dice que es un conjunto acotado en \mathbf{R}^n .

Definición de conjunto conexo. Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, se dice que es un conjunto conexo, si no es posible encontrar dos conjuntos abiertos B y C , distintos del vacío, tales que $A \subset B \cup C$, $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap C \neq \emptyset$, con $C \cap \bar{B} = \emptyset$ y $\bar{C} \cap B = \emptyset$.

Definición de dominio. Un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$, se dice que es un dominio si es abierto y conexo.

NOTA: Para mayor información véase, de la bibliografía, [11, García]

2. Notas sobre geometría

2.1 Vectores en el espacio \mathbf{R}^3 :

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\text{norma (módulo) del vector } \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Base canónica de \mathbf{R}^3

$$\overrightarrow{i} = (1, 0, 0); \quad \overrightarrow{j} = (0, 1, 0) \quad \overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$$

Todo vector se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base.

$$\overrightarrow{i} = (1, 0, 0); \quad \overrightarrow{j} = (0, 1, 0); \quad \overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$$

esto es,

$$\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}$$

Vector unitario.

$$\text{vector de modulo uno} = \left(\frac{v_1}{\|\overrightarrow{v}\|}, \frac{v_2}{\|\overrightarrow{v}\|}, \frac{v_3}{\|\overrightarrow{v}\|} \right)$$

Suma de vectores.

$$(v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

Producto de un vector por un escalar.

$$c(v_1, v_2, v_3) = (cv_1, cv_2, cv_3).$$

Producto escalar canónico. Dados dos vectores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ se define producto escalar canónico de dichos vectores al escalar dado por:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Propiedades del producto escalar:

$$1. \quad \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|^2 > 0.$$

2. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta$, θ = ángulo que forman los dos vectores

3. Vectores ortogonales (perpendiculares): Dos vectores (no nulos) son ortogonales si su producto escalar vale cero, esto es:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta = 0; \quad \theta = \pi/2$$

4. Cosenos directores de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

- $\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|}$, α = ángulo que forma el vector \vec{v} y el vector $\vec{j} = (1, 0, 0)$,

- $\cos \beta = \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}$, β = ángulo que forma el vector \vec{v} y el vector $\vec{k} = (0, 1, 0)$,

- $\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\vec{v}\|}$, γ = ángulo que forma el vector \vec{v} y el vector $\vec{i} = (0, 0, 1)$

Producto vectorial de dos vectores. Dados dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ de \mathbf{R}^3 se define producto vectorial del vector \vec{v} por el vector \vec{w} al vector dado por:

$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto vectorial:

1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$

2. $\vec{v} \times \vec{v} = 0$

3. $\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$

4. $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta$, θ = ángulo que forman los dos vectores

5. Dos vectores (no nulos) son paralelos si su producto escalar vale cero

6. El producto vectorial de dos vectores no es conmutativo

2.2 Geometría en el espacio \mathbf{R}^2 :

Distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pendiente de la recta que pasa por dos puntos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación de una recta: distintas formas de expresarla

$$\textit{continua} : \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\textit{punto - pendiente} : \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = mx + b.$$

$$\textit{general} : \quad Ax + By + C = 0$$

Distancia de un punto (x_0, y_0) **a la recta** $Ax + By + C = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Ángulo α entre dos rectas de pendientes m_1 y m_2

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Área de un triángulo de vértices los puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) .

$$\text{Área} = \text{valor absoluto de } \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

2.3 Geometría en el espacio \mathbf{R}^3 :

Distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$d(P_1, P_2) = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Vector de origen el punto (x_1, y_1, z_1) y de extremo el punto (x_2, y_2, z_2)

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Ecuación vectorial de una recta. Recta que pasa por el punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene por vector de dirección a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$x = x_1 + \lambda v_1$$

$$y = y_1 + \lambda v_2$$

$$z = z_1 + \lambda v_3$$

Ecuación continua de la recta. Recta que pasa por dos puntos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Ecuaciones de un plano:

Ecuación de un plano que **pasa por el punto** $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene de vectores directores a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

$$x = x_1 + \lambda v_1 + \mu w_1$$

$$y = y_1 + \lambda v_2 + \mu w_2$$

$$z = z_1 + \lambda v_3 + \mu w_3$$

Ecuación de un plano que **contiene al punto** $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **y su vector de dirección (vector perpendicular al plano) está dado por** $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$(x - x_0)v_1 + (y - y_0)v_2 + (z - z_0)v_3 = 0$$

La ecuación general de un plano está dada por

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (A, B, C) \text{ vector normal al plano}$$

Ecución de un plano que pasa por tres puntos

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecución de la recta que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

Distancia de un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(P_0, \Pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Distancia de un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a una recta

$$r \equiv \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3. \end{cases}$$

$$d(P_0, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_0Q} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|},$$

donde Q es un punto cualquiera de la recta r .

Ecuación de un plano referido a la intersección con los ejes.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Traza de un plano. Es cada una de las intersecciones de dicho plano con los ejes de coordenadas.

Ecuación de un plano paralelo al eje XY: $z = K$.

Ecuación de un plano paralelo al eje XZ: $y = K$.

Ecuación de un plano paralelo al eje YZ: $x = K$.

Haz de planos. El haz de planos definido por los planos $\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\Pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ viene dada por la ecuación

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + B'y + C'z + D') = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

Ángulo que forman dos planos. Es el ángulo formado por los vectores directores (normales) de dichos planos.

Coordenadas polares.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}$$

Coordenadas cilíndricas. $P(r, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Coordenadas esféricas. $P(r, \theta, \Phi)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \Phi \\ y = r \sin \theta \sin \Phi \\ z = r \cos \Phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ \Phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad 0 \leq \Phi \leq \pi$$

CÓNICAS

Ecuación general de una cónica

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Parábolas

Centro (h, k) y directriz $y = k - p$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k), \text{ Eje vertical}$$

Centro (h, k) y directriz $x = h - p$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h), \text{ Eje horizontal}$$

Circunferencia

Centro (a, b) y radio r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Elipse

Ecuación canónica de una elipse de centro (h, k) :

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Hipérbolas

Ecuación canónica de la hipérbola de centro (h, k) y eje transversal horizontal:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica de la hipérbola de centro (h, k) y eje transversal vertical:

$$\frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1$$

CRITERIOS PARA EL CÁLCULO DE EXTREMOS LIBRES:

Para dos variables:

Dada $z = f(x, y)$, si $f'_x(x_0, y_0) = 0$ y $f'_y(x_0, y_0) = 0$, calculado el valor del hessiano en dicho punto

$$H[f(x_0, y_0)] = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

caso de ocurrir que:

• $H[f(x_0, y_0)] > 0$ y $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces la función $f(x, y)$ presenta un mínimo relativo en el punto (x_0, y_0) .

• $H[f(x_0, y_0)] > 0$ y $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces la función $f(x, y)$ presenta un máximo relativo en el punto (x_0, y_0) .

• $H[f(x_0, y_0)] < 0$ y $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces la función $f(x, y)$ presenta un punto de ensilladura en (x_0, y_0) .

• $H[f(x_0, y_0)] = 0$, o no existe alguna derivada parcial, el criterio no da información.

Para tres variables:

Sea $w = f(x, y, z)$, si

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

dada la matriz Hessiana

$$H_F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

se estudia el signo en el punto (x_0, y_0, z_0) de los siguientes determinantes:

$$\Delta_1 = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

si:

• $\Delta_i > 0$, para todo $i = 1, 2, 3$ en el punto (x_0, y_0, z_0) la función tiene un mínimo local.

• $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$ en el punto (x_0, y_0, z_0) la función tiene un máximo local.

CRITERIOS PARA DETERMINAR EL TIPO DE EXTREMO SI SE EMPLEA EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:

Para una función de dos variables $f(x, y)$ y una ligadura $g(x, y)$:

Dado el Hessiano orlado

$$H_F = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Si:

- $H_F(x_0, y_0) > 0$, entonces la función f tiene un máximo condicionado en (x_0, y_0) .
- $H_F(x_0, y_0) < 0$, entonces la función f tiene un mínimo condicionado en (x_0, y_0) .
- $H_F(x_0, y_0) = 0$, no podemos determinar la naturaleza del punto (x_0, y_0) .

Para una función de tres variables $f(x, y, z)$ y una ligadura $g(x, y, z)$:

Dado el Hessiano orlado

$$H_F = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial g}{\partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Si:

- $H_F(x_0, y_0, z_0) < 0$ y $\Delta > 0$, entonces la función f tiene un máximo condicionado en (x_0, y_0, z_0) .
- $H_F(x_0, y_0, z_0) < 0$ y $\Delta < 0$ entonces la función f tiene un mínimo condicionado en (x_0, y_0, z_0) .
- $H_F(x_0, y_0, z_0) > 0$, entonces la función f no tiene extremos condicionados en el punto (x_0, y_0, z_0) .
- $H_F(x_0, y_0, z_0) = 0$, no podemos determinar la naturaleza del punto (x_0, y_0, z_0) .