

Pdg'  $\|X\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$  es norma.

1) Pdg'  $\|X\|_p = 0 \Leftrightarrow X = 0$

$\Rightarrow \|X\|_p = 0 \Rightarrow \sqrt[p]{\sum |x_i|^p} = 0$

$\Rightarrow \sum |x_i|^p = 0$

$\Rightarrow |x_i|^p = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow X = 0$

$\Leftarrow X = 0 \Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$   
 $\Rightarrow \|X\|_p = 0$

2) Pdg'  $\|X\|_p \geq 0$

como  $|x_i| \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \|X\|_p \geq 0$

Además claramente  $\|X\|_p < +\infty$ . ~~Pdg~~

3) Pdg'  $\| \lambda X \|_p = |\lambda| \|X\|_p$

$$\begin{aligned} \| \lambda X \|_p &= \left( \sum |\lambda x_i|^p \right)^{1/p} = \left( \sum |\lambda|^p |x_i|^p \right)^{1/p} \\ &= |\lambda| \left( \sum |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|X\|_p \end{aligned}$$

4)  $\forall p \geq 1 \quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

La desigualdad anterior es conocida como la desigualdad de Minkowski.

Para  $p=1$ : La desigualdad parece natural.  
En efecto si  $p=1$ :

$$\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

• lo que se reduce a desigualdad triangular del módulo.

Para  $p > 1$ : Demostraremos primero la desigualdad de Holder:

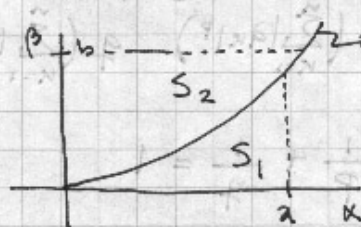
$$\forall p, q \geq 1 \quad \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$$

donde  $p > 1, q > 1$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Demostración:

• Consideremos en el plano  $(x, y)$  la curva dada por  $y = x^{p-1}$  ( $x \geq 0$ ). Notemos que la función anterior es creciente ( $p > 1$ ).

Análogamente, podemos definir  $x = y^{q-1}$ . (Claramente una es la inversa de la otra).



Claramente  $S_1 + S_2 \geq ab$ .



Calculamos  $S_1$  y  $S_2$ :  $\|X\|_p + \|Y\|_q \geq \|X+Y\|_r$  (\*)

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$$

$$S_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

Por lo tanto:  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ . Con  $p \geq 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  •

Sean  $a = \|x\|_p$ ,  $b = \|y\|_q$  :  $1 \leq p, q$

$$\left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} ; \quad \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \frac{|a_k| \cdot |b_k|}{\left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}} \leq \frac{|a_k|^p}{p \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)} + \frac{|b_k|^q}{q \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)}$$

y aplicando suma de l.a. n en ambos lados:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n |a_k b_k|}{\left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}} &\leq \frac{\sum_{k=1}^n |a_k|^p}{p \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)} + \frac{\sum_{k=1}^n |b_k|^q}{q \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

entonces,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$$

con  $p > 1, q > 1$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Notemos que si  $p = q = 2$  entonces la desigualdad de Hölder se transforma en la desigualdad de Cauchy-Buniakovski.  $\square$

Ahora si demostramos la desigualdad de Minkowski para  $p > 1$ . (Claramente para  $p < 1$  no tiene sentido).

Notemos que:

$$\begin{aligned} |x_k + y_k|^p &= |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \leq |x_k + y_k|^{p-1} (|x_k| + |y_k|) \\ &= |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \end{aligned}$$

entonces,

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1}$$

Ahora aplicamos Hölder a cada uno de las sumas de la derecha.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p &\leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\ &\quad + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \end{aligned}$$



$$\text{con } p \geq 1 \text{ y } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 \Rightarrow \frac{p+q}{pq} = 1 \Rightarrow p+q = pq$$

$$\Rightarrow \boxed{p = (p-1)q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1-1/p}$$

$$+ \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1-1/p}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1-1/p} \left( \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \right)$$

$$\Rightarrow \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$$\therefore \|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \text{ es una norma en } \mathbb{R}^n$$