

Respuesta de frecuencia

La forma en que un sistema responde a una entrada oscilatoria define su "respuesta de frecuencia". El análisis de la respuesta a entradas oscilantes permite llegar a métodos de sintonía de parámetros de controladores, entre otras virtudes.

Es probablemente mas simple comenzar con un sistema conocido, por ejemplo, un sistema de **primer orden**:

$$G(s) = \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$$

es excitado por una entrada sinusoidal de amplitud A y de frecuencia ω ,

$$f(t) = A \times \text{seno}(\omega \times t)$$

entonces, la entrada al proceso en el campo transformado será:

$$f(s) = \frac{A \times \omega}{s^2 + \omega^2}$$

de modo que la respuesta del proceso será:

$$y(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \times \frac{A \times \omega}{s^2 + \omega^2}$$

que, al destransformar (vía fracciones parciales, etc.) da una respuesta final (i.e. a tiempo infinito) de carácter oscilatorio también,

$$y(t) = \left(\frac{K_p A \omega \tau_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \times e^{-t/\tau_p} \right) - \left(\frac{K_p A \omega \tau_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \times \cos(\omega t) \right) + \left(\frac{K_p A}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \times \text{seno}(\omega t) \right)$$

Se debe destacar que se obtiene, finalmente, una oscilación permanente porque el término exponencial (el primer término) se extingue a t extenso; es decir, la respuesta del nuevo estado estacionario será:

$$y_{e.e.}(t) = - \left(\frac{K_p A \omega \tau_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \times \cos(\omega t) \right) + \left(\frac{K_p A}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \times \text{seno}(\omega t) \right)$$

o, por identidades trigonométricas:

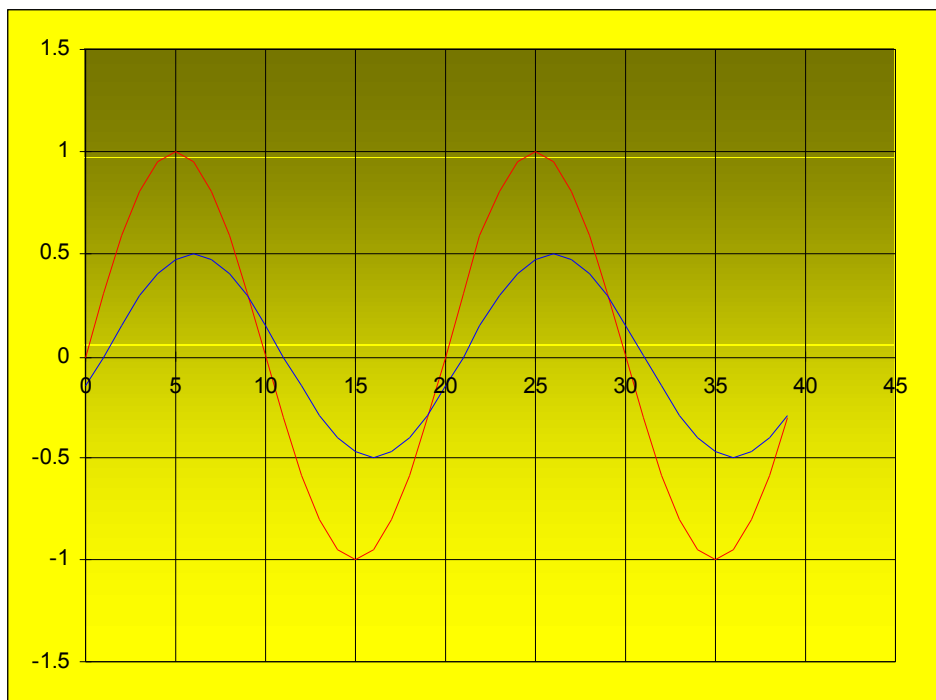
$$y_{e.e.}(t) = \frac{K_p A}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}} \times \text{seno}(\omega t + \phi) \quad ; \quad \phi = \tan^{-1}(-\omega \tau_p)$$

Se puede concluir, al menos, que:

1. El nuevo estado estacionario (de un primer orden con entrada sinusoidal) es una respuesta oscilante, de la misma frecuencia que la entrada.
2. La amplitud de la respuesta es una función tanto de la amplitud de la entrada como de la frecuencia (de allí que se suele hablar de la Razón de Amplitudes):

$$R.A. = \text{Razón de Amplitudes} = \frac{K_p}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}}$$

3. La respuesta se retrasa respecto de la entrada en un ángulo de fase ϕ , que depende de la frecuencia de entrada.



Si la línea roja fuese la entrada y la azul la respuesta, entonces la R.A. sería del orden de 0,5. ¿Cuánto será el ángulo de fase? ¿En qué unidades?

Algunas propiedades de los números complejos ayudarán a realizar el análisis de la respuesta de frecuencia. Un breve repaso permitirá definir la notación que se utilizará.

Si se considera un número complejo cualquiera, en la forma

$$W = a + j b$$

Se dice que la magnitud “a” es su parte real y la magnitud “b” su parte imaginaria; mientras tanto, “j” representa un eje ortogonal y su magnitud es la raíz cuadrada de “-1”

Entonces, como notación, se puede usar que:

$$a = \Re(W) \quad y \quad b = \Im(W)$$

El “Módulo” (o valor absoluto) del número complejo “W” se asocia a la magnitud de un vector tendido entre dos ejes ortogonales (norma Euclidiana):

$$|W| = \sqrt{[\Re(W)]^2 + [\Im(W)]^2}$$

mientras que su “ángulo de fase” (o su argumento), representado por $\arg(W)$ (“argumento de W”) está definido como el ángulo que tendería el vector W en el plano complejo:

$$\arg(W) = \tan^{-1} \left[\frac{\Im(W)}{\Re(W)} \right] = \phi$$

Similarmente, es fácil demostrar que si $Z = a - jb$ es el número complejo conjugado de $W = a + jb$ entonces sus módulos son iguales y sus argumentos son inversos aditivos ($\arg(Z) = -\arg(W)$).

Un método tradicional para encontrar la magnitud y fase de una función de transferencia consiste en evaluarla cuando la variable compleja “s” vale “jω”. Por ejemplo, dada la función de transferencia de primer orden que se está analizando:

$$G(s) = \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$$

su evaluación cuando “s=jω” y una pequeña manipulación resulta en:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{y(j\omega)}{f(j\omega)} = \frac{K_p}{\tau_p j\omega + 1} = \frac{K_p}{\tau_p j\omega + 1} \times \frac{-\tau_p j\omega + 1}{-\tau_p j\omega + 1} \\ G(j\omega) &= \left(\frac{K_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \right) - j \left(\frac{K_p \omega \tau_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Calculando ahora el módulo y el argumento de la función de transferencia evaluada en $s = j\omega$:

$$|G(j\omega)| = \frac{K_p}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}} = R.A. ; \quad \arg(g(j\omega)) = \tan^{-1}(-\omega \tau_p)$$

De donde se deduce una regla práctica común para un proceso de primer orden, excitado por una entrada oscilante

La [razón de amplitudes](#) y el [retardo de fase](#) de la respuesta a tiempo infinito de un proceso corresponden al [módulo](#) y [argumento](#) de su función de transferencia evaluada en $s = j\omega$.

Este resultado será útil para resolver cálculos de R.A. y de $\arg()$ en forma simplificada... pero tiene más implicaciones aún, sobre todo en análisis de estabilidad y sintonización de controladores.

Generalización de Respuestas de Frecuencia

Cualquier sistema lineal generará, siempre, una función de transferencia consistente de la razón de dos polinomios ($Q(s)$ en el numerador y $P(s)$ en el denominador) donde el denominador ($P(s)$) es de más alto orden que el numerador ($Q(s)$):

$$G(s) = \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Si esta función de transferencia es sometida a una entrada $f(t)$ sinusoidal, se puede demostrar (el lector está capacitado para realizar la demostración) que:

1. La respuesta a tiempo infinito es una senoide, a la misma frecuencia
2. La Razón de Amplitudes es función de la frecuencia y queda determinada por el módulo de la función de transferencia evaluada en $s=j\omega$
3. La salida sinusoidal se retrasa en un ángulo cuyo valor queda determinado por el argumento de la función de transferencia evaluada en $s=j\omega$

Debiera, entonces, ser bastante simple encontrar la R.A. y la fase de cualquier función de transferencia (físicamente válida).

Por ejemplo:

Un proceso capacitivo puro, cuya función de transferencia es $G(s) = K_p/s$, al ser evaluada en $s=j\omega$ permite deducir que:

$$G(j\omega) = \frac{K_p}{j\omega} \bullet \frac{j\omega}{j\omega} = 0 - j \frac{K_p}{\omega}$$

$$R.A. = |G(j\omega)| = \frac{K_p}{\omega};$$

$$\phi = \arg\{G(j\omega)\} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}} \right) = \tan^{-1}(-\infty) = -90^\circ$$

Es decir, la respuesta de un proceso capacitivo puro a una entrada sinusoidal es una oscilación de la misma frecuencia retardada en 90° de arco.

Es recomendable que el lector ensaye en el sistema de estanque con bomba de descarga de Control Station una oscilación centrada en 20, de amplitud 2 y de períodos de 100 y 200 segundos para ratificar los resultados anteriores.

Como otro ejemplo, será útil calcular la R.A. y $\arg()$ de un sistema compuesto por N capacidades conectadas en serie no interactuante, ya que genera una función de transferencia de orden N pero cuya respuesta a un escalón es siempre una sigmoídea.