

## Un modelo de equilibrio general de dos sectores (2x2)

ANDRES ULLOA

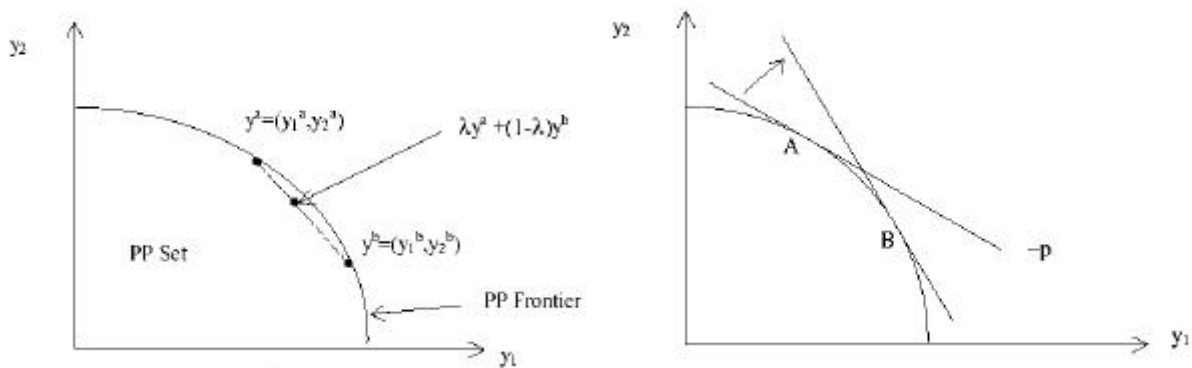
### 1.- Preliminares

Suponga una economía con dos sectores, cada uno produciendo un bien con una tecnología creciente en insumos, concava y con retornos constante a escala (homogenea de grado uno en insumos)<sup>1</sup> y que podemos denotar por  $y_i = f_i(L_i, K_i)$ ,  $i=1,2$ . Donde  $L_i$  representa trabajo y  $K_i$  representa capital.

Asumiremos que los factores son plenamente móviles entre sectores pero están restringidos por su capacidad. Es decir:

$$(1) \quad L_1 + L_2 \leq L \text{ y } K_1 + K_2 \leq K.$$

Donde  $L$  y  $K$  están fijas. Como sabemos maximizando la función  $y_1 = f_1(L_1, K_1)$  sujeto a  $y_2 = f_2(L_2, K_2)$ , y la restricción de recursos (1) nos da  $y_2 = h(y_1, L, K)$ . Esto es la típica FPP entre  $y_2$  y  $y_1$  de la figura 1.



**Figura 1 :Frontera de posibilidades de Producción**

La función que da origen a esta frontera es cóncava ya que la función  $h$  es cóncava y cada  $f_i$  es cóncava en sus argumentos. El conjunto de posibilidades de producción ( $S$ ) es convexo ya que si  $y^a \in S$  y  $y^b \in S$  la combinación también está en  $S$ .

Suponiendo que la economía actúa competitivamente y los precios son exógenos podemos definir una función  $G$  como:

$$(2) \quad G(p_1, p_2, L, K) = \max_{y_1, y_2} p_1 y_1 + p_2 y_2 \quad \text{s.t.} \quad y_2 = h(y_1, L, K).$$

<sup>1</sup> Esto aún cuando la existencia de retornos crecientes puede ser un importante motivo para la existencia de comercio internacional.

Esta es la parte derecha de la figura 1, con pendiente  $-p = -p_1/p_2 = -\partial h/\partial y_1$  y que corresponde al punto A de la figura. Un aumento del precio del bien 1 en la figura aumenta la pendiente y traslada la tangencia a B.

La función G tiene algunas propiedades interesantes. En particular podemos diferenciarla respecto a  $p_1$  y obtenemos :

$$(3) \quad \frac{\partial G}{\partial p_i} = y_i + \left( p_1 \frac{\partial y_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial y_2}{\partial p_i} \right) .$$

Aplicando el teorema de la envolvente sabemos que en el óptimo el paréntesis de la derecha se iguala a cero. De esta manera sabemos que la derivada de G respecto a  $p_i$  es el nivel de producción óptimo  $y_i$ . Esta no es otra cosa que la función de ingreso de la economía

Las condiciones de equilibrio

Se trabajará con una función de costo unitario la que como sabemos es dual a la función de producción. Esta está definida por:

$$(4) \quad c_i(w, r) = \min_{L_i, K_i \geq 0} \{ wL_i + rK_i \mid f_i(L_i, K_i) \geq 1 \} .$$

Es decir  $c_i(w, r)$  es el mínimo costo de producir una unidad de producto. Debido al supuesto de retornos constantes a escala este es también el costo medio y marginal. Se sabe que esta función es no decreciente y cóncava en  $w$  y  $r$ . Podemos escribir esta función como:

$$(5) \quad c_i(w, r) = a_{iL}w + a_{iK}r$$

con  $a_{iL} = L_i/y_i$  y  $a_{iK} = K_i/y_i$ , para  $L_i$  y  $K_i$  elegidas óptimamente. Por lo tanto son requerimientos óptimos de trabajo y capital por unidad de producción. Donde estas elecciones dependen de los precios de los factores, es decir se pueden escribir como  $a_{iL}(w, r)$  y  $a_{iK}(w, r)$ . Diferenciando la función de costos respecto al salario se tiene:

$$(6) \quad \frac{\partial c_i}{\partial w} = a_{iL} + \left( w \frac{\partial a_{iL}}{\partial w} + r \frac{\partial a_{iK}}{\partial w} \right) .$$

Igual que antes usando el teorema de la envolvente obtenemos que la derivada de la función unitaria de costos en relación a  $w$  es  $a_{iL}$  y respecto a  $r$  es  $a_{iK}$ . Las condiciones de equilibrio las podemos representar por:

$$(6) \quad \begin{aligned} p_1 &= c_1(w, r) \\ p_2 &= c_2(w, r) \\ a_{1L}y_1 + a_{2L}y_2 &= L \\ a_{1K}y_1 + a_{2K}y_2 &= K \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones de (6) corresponden a las condiciones de cero utilidad de equilibrio de largo plazo bajo competencia perfecta. La tercera y cuarta ecuación corresponden a la restricción de factores o pleno empleo de factores. Estas ecuaciones de (6) forman un sistema de 4 ecuaciones y cuatro variables desconocidas ( $w, r$ ) y ( $y_1, y_2$ ). Los parámetros  $p_1, p_2, L$  y  $K$  son dados exógenamente. Supondremos que la solución a este sistema existe y es único.

A continuación mostraremos (1) cual es la solución para el precio de los factores (2) cual es la relación entre el precio de los bienes y el precio de los factores (3) cual es la relación entre cambios en la dotación y cambios en los bienes.

## 2.- Determinación del precio de los factores

Del sistema de ecuaciones de (6) podemos ver que una forma de obtener solución al sistema es resolviendo  $w, r$  de las condiciones de cero utilidad y reemplazándolos en las condiciones de pleno empleo las cuales relacionan precio de factores a través de  $a_{iL}$  y  $a_{iK}$  y los bienes  $y_i$ . En base a esto podemos decir:

**Proposición 1.** Si los bienes  $y_i$  son producidos y no hay reversión en la intensidad de uso de factores, existe una única relación entre precio de bienes y precio de factores.

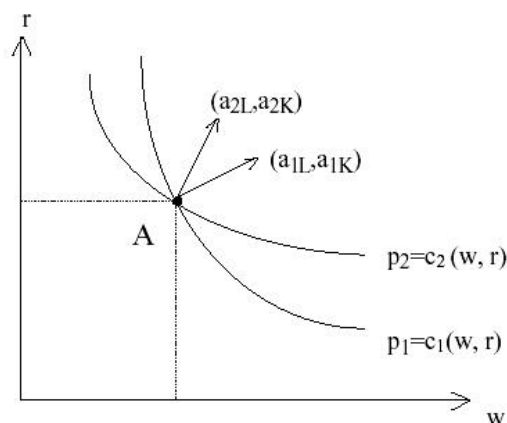
Este resultado muestra que la dotación ( $L, K$ ) no importa al momento de determinar ( $w, r$ ). En una economía de un sector sabemos que un aumento de la dotación de trabajo aumenta la oferta y reduce el salario de equilibrio, de manera que países con mayor dotación relativa de trabajo ( $L/K$ ) tendrían salarios menores. En un modelo de 2 sectores vemos que la dotación de factores es neutra cuando los precios son exógenos. Este es un resultado vital en la teoría del comercio internacional<sup>2</sup>. Expliquemos la proposición 1 usando la figura 2.

La figura 2, lado izquierdo muestra las funciones de costo unitario en el espacio  $w, r$ . Dada que las intensidades de uso de los factores son distintas para cada bien, las pendientes de la función de costos son también distintas ( $L_i/K_i$ ). En la figura, el bien 1 es intensivo en trabajo mientras que el 2 en capital ( $L_1/K_1 > L_2/K_2$ ). También podemos verlo usando el vector gradiente, que es el vector ortogonal a la curva. Estos corresponden a  $a_{1L}, a_{1K}$  en el lado izquierdo de la figura 2. La pendiente de este vector gradiente es  $a_{1K}/a_{1L} = L_1/K_1$ .

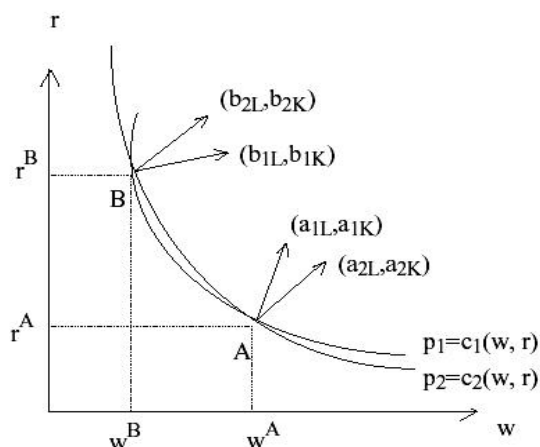
La figura 2, derecha, muestra una situación de reversión en la intensidad de factores. Allí se observan dos intersecciones y por lo tanto dos sets de vectores gradientes  $a_{1L}, a_{1K}$  y  $b_{1L}, b_{1K}$ . Esto es puntos A, donde el bien 1 es intensivo en capital y B donde el bien 1 es intensivo en trabajo. Por lo tanto a diversos precios la intensidad de factores cambia en el gráfico. Si bien esta situación es paradójica en una economía plenamente integrada, podría darse en economías no completamente integrada. Por ejemplo, el punto A puede representar una tecnología moderna para producir el bien 1 con mucho capital y el punto B una tecnología atrasada intensiva en capital. Es decir simultáneamente tenemos dos equilibrios en dos

<sup>2</sup> Al introducir comercio podemos suponer que los factores productivos ( $k, L$ ) son inmóviles y es a través del comercio que se llega a un equilibrio.

países distintos para los mismos bienes. ¿Cómo sabemos donde está cada país?, ¿Es este realmente un equilibrio?. Uno esperaría que el país abundante en trabajo esté en B pagando bajos salarios (China) y el país abundante en capital esté en A pagando altos salarios.



**Figura 2a: Equilibrio**



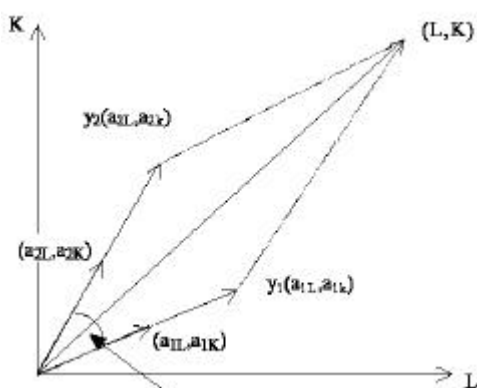
**Figura 2b: Reversión en la intensidad de uso**

Para relacionar la dotación de factores y precio podemos rescribir las dotaciones de factores en forma vectorial como

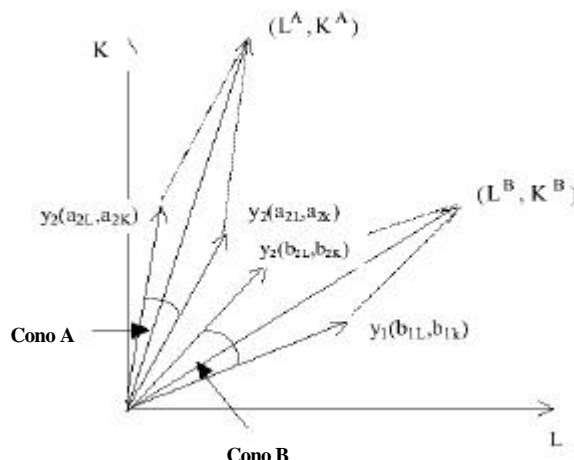
$$(7) \quad \begin{pmatrix} a_{1L} \\ a_{1K} \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} a_{2L} \\ a_{2K} \end{pmatrix} y_2 = \begin{pmatrix} L \\ K \end{pmatrix}$$

Gráficamente esto puede ser representados por la figura 3a y 3b

o



**Figura 3a: Un único equilibrio**



**Figura 3b: Más de un equilibrio**

Graficando los vectores gradientes, pero en el espacio K y L en lo que se conoce como el diagrama de Learner- Pearce , podemos en la figura 3a obtener un único equilibrio en el precio de los factores y un único equilibrio en los requerimientos  $a_L, a_K$ . Multiplicando éstos por su respectivas cantidades de bienes obtenemos los  $y(a_L, a_K)$ , y usando (7) las dotaciones L y K. Pero esto se puede hacer al revés. Es decir dada las dotaciones (L,K) podemos encontrar las cantidades  $y(a_L, a_K)$  determinados por sus intensidades de factores  $a_L, a_K$ . Las cantidades serán positivas si el vector de dotaciones se encuentra entre los dos gradientes. El área entre estos gradientes se conoce como el cono de diversificación. Si la dotación estuviera fuera, estaríamos en un caso de especialización y la simple teoría de un sector se aplica.

La figura 3b es un poco más complicada. Allí hay dos pares de vectores gradientes y dos conos de diversificación. Ello da origen a dos posibles equilibrios en el precio de los factores para A y B. ¿Cuál precio de los factores corresponderá a cada economía?. Una economía abundante en capital como el país A de la figura, tendrá precios de factores dados por  $(w^A, r^A)$  con salarios altos. Una economía abundante en trabajo como B tendrá precios de factores como  $(w^B, r^B)$  con salarios menores. Por lo tanto aquí si los precios de los factores dependerán de la dotación de la economía.<sup>3</sup>

Suponiendo que hay un único cono de diversificación, es decir el cual el lema 1 se aplica, ¿Cuáles son las implicancias en la determinación de los precios de los factores bajo libre comercio? . Para ello podemos trabajar con algunos de los supuestos usuales del llamado modelo Heckscher-Ohlin –Samuelson. Esto es 2 países con idénticas tecnologías pero diferentes dotaciones de factores. Ello implica entonces que la condición (6) se aplica a cada país resultando en un mismo precio de los bienes ( $p_1, p_2$ ). Dotaciones distintas de los dos países, no afectarán los precios de los factores cuando ambos países están dentro del cono de diversificación. Esto significa que el precio del trabajo y capital será idéntico en ambos países. Esto es lo que se conoce como el teorema de la igualación del precio de los factores (samuelson, 1949).

### 3.-Teorema de la igualación del precio de los factores

Supongamos que dos países comercian en libre comercio con idénticas tecnologías pero diferentes dotaciones de factores. Si ambos países están diversificados y no hay reversión en la intensidad de usos de los factores ,  $(w, r)$  serán iguales entre países.

Para ilustrar esto, partamos de una situación en que el trabajo y capital son libres de moverse entre ambos países hasta que los precios de los factores se igualen. Entonces todo lo que interesa para determinar el precio de los factores es su dotación mundial y estos se muestran en el eje horizontal y vertical de la figura 4. Donde L y K para el país doméstico se miden de a partir del punto O y para el país extranjero a partir de O\*. Partiremos suponiendo que las dotación de cada país están en el punto B. Primero grafiquemos los conos de diversificación para cada país. Estos forman el paralelogramo OA<sub>1</sub>O\*A<sub>2</sub>.

<sup>3</sup> Existe alguna evidencia empírica de la existencia de múltiples conos.

Identifiquemos los puntos  $A_1$  y  $A_2$  de este paralelogramo. El vector  $OA_i$  es proporcional a  $(a_{iL}, a_{iK})$ , la cantidad de trabajo y capital usada para producir una unidad de  $y_i$ . Multiplicando  $(a_{iL}, a_{iK})$  por las demandas mundiales del bien  $i$   $D_i^w$ , se obtienen las cantidades de trabajo y capital usadas para producir ese bien. Estas demandas de factores se igualan a las ofertas de factores usadas en la producción mundial (dotación).

Ahora podemos preguntar si podemos ejecutar exactamente la misma producción mundial y los precios de equilibrio como en el mundo integrado de arriba, con comercio pero sin movilidad de capital y trabajo. Por ejemplo, suponiendo que hay una dotación de  $L$  y  $K$  entre los países tales como el punto  $B$  de la figura. Podemos producir la misma cantidad de bienes que antes?. Si, ahora se pueden destinar  $OB_1$  y  $OB_2$  de recursos para el país doméstico y  $OB_1^*$  y  $OB_2^*$  para el país extranjero. Esto asegurará que la misma cantidad de trabajo y capital sea mundialmente asignado a cada bien como antes en el mundo integrado de manera que la producción y precios de equilibrio deben ser los mismos.

Es decir para cualquier asignación de trabajo y capital dentro del paralelogramo, ambos países permanecen diversificados y pueden ejecutar el mismo precio de equilibrio como en un mundo integrado. Se sigue, entonces, que los precios se igualen a través de los países para las asignaciones dentro del paralelogramo, lo cual es llamado FPE set. En el punto  $B'$ , al menos un país podría estar especializado.

El teorema de igualación de precio de los factores nos dice entonces que el comercio entre bienes tiene la habilidad de igualar el precio de los factores, y por lo tanto es un perfecto sustituto para la movilidad de factores.

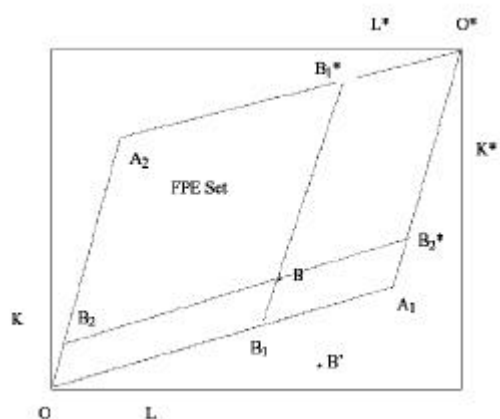


Figura 4: Paralelogramo

#### 4.- Cambio en el precio del bien.

Analicemos ahora la segunda pregunta, ¿cómo afecta un cambio en el precio de los bienes a los factores productivos?. Diferenciando totalmente la primera relación en (6) obtenemos:

$$(8) \quad dp_i = a_{iL} dw + a_{iK} dr \Rightarrow \frac{dp_i}{p_i} = \frac{wa_{iL}}{c_i} \frac{dw}{w} + \frac{ra_{iK}}{c_i} \frac{dr}{r}, \quad i=1,2.$$

Esto nos permite dejar las variables en cambios porcentuales y participación de costos . Específicamente podemos reescribir la ecuación (8) como:

$$(9) \quad \hat{p}_i = \theta_{iL} \hat{w} + \theta_{iK} \hat{r}, \quad i=1,2.$$

Esto puede ser expresado matricialmente como:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{1L} & \theta_{1K} \\ \theta_{2L} & \theta_{2K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{r} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\theta|} \begin{pmatrix} \theta_{2K} & -\theta_{1K} \\ -\theta_{2L} & \theta_{1L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix}$$

donde  $|\theta|$  denota el determinante de la matriz. Esto puede alternativamente ser expresado como:

$$(11) \quad \begin{aligned} |\theta| &= \theta_{1L} \theta_{2K} - \theta_{1K} \theta_{2L} \\ &= \theta_{1L} (1 - \theta_{2L}) - (1 - \theta_{1L}) \theta_{2L} \\ &= \theta_{1L} - \theta_{2L} = \theta_{2K} - \theta_{1K} \end{aligned}$$

Donde se ha usado el hecho de que  $\theta_{iL} + \theta_{iK} = 1$

Suponiendo que la industria 1 es intensiva en trabajo, se tiene que  $\theta_{1L} - \theta_{2L} > 0$ .

De manera tal que  $|\theta| > 0$ . Además suponiendo que los precios relativos del bien 1

aumentan , de manera tal que:  $\hat{p} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0$  , podemos resolver para cambios en los

precios de los factores de (10) y (11) obteniendo:

$$(12) \quad \begin{aligned} \hat{w} &= \frac{\theta_{2K} \hat{p}_1 - \theta_{1K} \hat{p}_2}{|\theta|} = \frac{(\theta_{2K} - \theta_{1K}) \hat{p}_1 + \theta_{1K} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{(\theta_{2K} - \theta_{1K})} > \hat{p}_1, \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0, \\ \hat{r} &= \frac{\theta_{1L} \hat{p}_2 - \theta_{2L} \hat{p}_1}{|\theta|} = \frac{(\theta_{1L} - \theta_{2L}) \hat{p}_2 - \theta_{2L} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{(\theta_{1L} - \theta_{2L})} < \hat{p}_2, \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0. \end{aligned}$$

Para ello podemos ver que el salario aumenta por una cantidad mayor que el precio del bien del bien 1 , esto es  $\hat{w} > \hat{p}_1 > \hat{p}_2$ . Esto significa que el salario real en términos del bien 1 y bien 2 han ha crecido  $((w/p_1, w/p_1)$ .

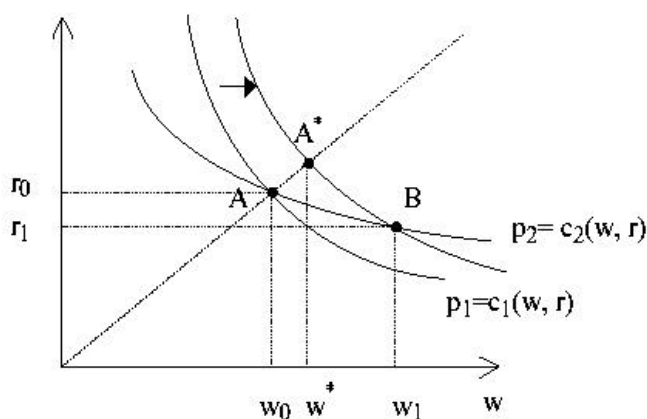
### **Teorema de Solper- Samuelson**

Un aumento en el precio relativo de un bien aumentará el retorno real del factor usado má intensivamente en ese bien , y reducirá el retorno real del otro factor.

De la ecuación (9) podemos ver que el cambio en precio es un promedio ponderado del cambio en los precios de los factores . Esto implica que el cambio en precio se encuentra entre el cambio en salario y el cambio en el precio del capital- poniendo esto junto y asumiendo que  $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0$  se puede ver que:

$$(13) \quad \hat{r} < \hat{p}_2 < \hat{p}_1 < \hat{w}$$

Esto es llamado el efecto magnificación y es graficado en la figura 5.



Allí partimos con un punto inicial A con la industria 1 intensiva en trabajo. Un aumento en el precio de equilibrio de esta industria, cambia la iso-costos hacia la derecha al punto B. Es claro que el salario ha subido y que la renta del capital ha caído desde  $r_0$  a  $r_1$ . ¿Cómo podemos asegurar que el salario ha subido más que el precio?.

TAREA. ANALICE QUE OCURRE SI AHORA CAMBIAN LAS DOTACIONES DE LOS FACTORES K O L. Esto Es llamado el teorema de Rybczynski.