

Productividad y Eficiencia

La siguiente presentación está basada en los numerosos desarrollos de

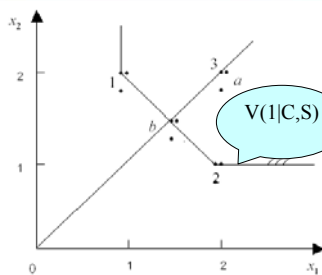
**Färe, R and S. Grosskopf
Oregon State University**

1

Medidas de eficiencia

- Primeros vimos como se construye una tecnología con los datos ahora veamos como medimos eficiencia y que tan bien lo está haciendo una firma. La meta es maximización de beneficios o minimización de costos (dual). Eficiencia requiere el menor uso de recursos. Entre las medidas se usan aquellas que no requieren datos de precios (eficiencia técnica) y aquellas que requieren usos de precios (eficiencia económica)

2



$F_i(x,y|C,S) = \min \{ \lambda > 0 : \lambda x \in V(y|C,S) \}$
Farrell-Medida de eficiencia técnica

Por ejemplo podemos elegir b como nuestro benchmark. Una tecnología de referencia hipotética que muestra la misma mezcla de insumos.

La eficiencia técnica la podríamos medir como $0b/Oa$. Mientras más cercana a uno más eficiente somos. Esta medida es la radial función distancia

3

- Esto se podría medir para la firma 3 que para producir una unidad usa 2 insumos de x_1 y 2 de x_2

$$F_i(1,2,2 | C, S) = \min \lambda$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} z_1 1 + z_2 1 + z_3 1 &\geq 1, \\ z_1 1 + z_2 2 + z_3 2 &\leq \lambda 2, \\ z_1 2 + z_2 1 + z_3 2 &\leq \lambda 2, \\ z_1 &\geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0, \end{aligned}$$

Con solución $F_i(1,2,2|C,S)=0.75$

Es decir podríamos ahorrar un 25% de insumos

El valor límite de F_i es uno por lo que:

y para el caso de la firma técnicamente eficiente: $0 < F_i(x, y | C, S) \leq 1$

$$F_i(x^k, y^k | C, S) = 1$$

4

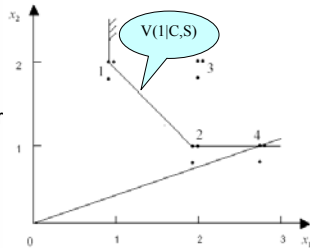
USO EXCESIVO DE INSUMOS

- ¿Qué ocurre si las firmas benchmark están usando más insumos que otra firma que está en la frontera?

Firm (DMU)	Input 1 x_1	Input 2 x_2	Output y
4	3	1	1

Donde la eficiencia puede ser medida por: $F_i(1,3,1|C,S)=1$

La firma 4 podría producir x_1 usando una unidad menos



5

- Definición: En general se dice que hay un uso excesivo de insumos para el insumo x_n y la firma k cuando:

$$\sum_{k=1}^K z_k x_{kn} < x_{k'n} F_i(y^{k'}, x^{k'} | C, S),$$

- para alguna solución z_k , $k=1, \dots, K$

6

Descomponiendo la eficiencia técnica

- El componente escala de la eficiencia:
 - Sabemos que la eficiencia cuando existen retornos variables a escala es:

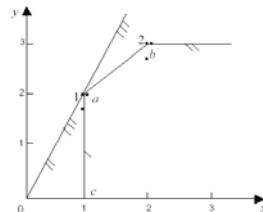
$$F_i(x, y | V, S) = \min \{ \lambda : \lambda x \in V(y | V, S) \}$$

En el ejemplo anterior:

$$F_i(2, 1 | V, S) = 1 \quad \text{para la firma 1}$$

$$F_i(3, 2 | V, S) = 1 \quad \text{para la firma 2}$$

- Las firmas 1 y 2 están en la frontera de V



7

- Escribiendo el LP para la firma 2 sería:

$$\begin{aligned} F_i(3, 2 | V, S) &= \min \lambda \\ \text{s.t.} \quad & z_1 2 + z_2 3 \geq 3, \\ & z_1 1 + z_2 2 \leq 2, \\ & z_1 + z_2 = 1, \\ & z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0. \end{aligned}$$

La solución que toma un valor 1 para λ es consistente con $z_1=0$ y $z_2=1$

Haciendo lo mismo para el caso en que hay CRS encontramos que:

$$F_i(2, 1 | C, S) = 1 \quad \text{para la firma 1, punto a en la figura}$$

$$F_i(3, 2 | C, S) = .75 \quad \text{para la firma 2, punto b en la figura}$$

Por lo tanto la firma 1 es eficiente en ambos casos y la 2 solo cuando se considera una tecnología con VRS

8

Una medida de escala eficiencia

- Es posible definir una medida de eficiencia escala insumo :
 $S_i(y, x|S) = F_i(y, x|C, S) / F_i(y, x|V, S)$
 Por lo tanto para la firma 1: $S_i(3, 2|S) = 1$, **es escala eficiente**
 Para la firma 2: $S_i(3, 2|S) = .75$, **es escala ineficiente**
- Esta medida muestra si una empresa está operando en un punto donde prevalece CRS. Pero si es ineficiente no podemos saber si esta operando en un tramo de retornos a escala creciente o decreciente.

9

- En el caso de retornos no crecientes $V(y|N, S)$
 $F_i(y, x|N, S) = \min \{ \lambda > 0 : \lambda x \in V(y|N, S) \}$
 En el ejemplo $F_i(3, 2|N, S) = 1$ para la firma 2, es decir
 $F_i(y, x|V, S) \geq F_i(y, x|N, S) \geq F_i(y, x|C, S)$ [$1 \geq 1 \geq .75$]
 Como $F_i(y, x|V, S) = F_i(y, x|N, S)$, ello implica que la firma 2 opera con retornos decrecientes a escala.
 En términos generales se puede expresar que si
 $S_i(y, x|S) < 1$ La ineficiencia a escala se debe a:
 - retornos crecientes a escala si $F_i(y, x|N, S) = F_i(y, x|C, S)$,
 - retornos decrecientes a escala $F_i(y, x|N, S) > F_i(y, x|C, S)$,

10

El componente congestión

- Para aislar el efecto congestión se debe obtener la siguiente medida:
 $F_i(y, x|V, W) = \min \{ \lambda x \in V(y|V, W) \}$
- Una medida de la congestión puede ser:
 $CN_i(y, x|V) = F_i(y, x|V, S) / F_i(y, x|V, W)$
- La observación k esta libre de congestión si $CN_k(y, x|V) = 1$ y con congestión si es menor a uno.
- Se puede obtener la siguiente medida de eficiencia técnica:
- $F_i(y, x|C, S) = S_i(y, x|S) \cdot CN_i(y, x|V) \cdot F_i(y, x|V, W)$
- El primer componente mide desviaciones respecto a los retornos constantes a escala. El segundo captura desviaciones respecto a fuerte disponibilidad de insumos y el tercero una medida de eficiencia técnica relativo a retornos a escala variable con debil disponibilidad.

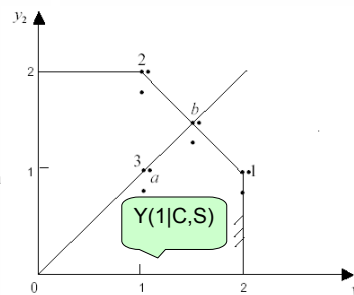
11

Medidas de eficiencia en producción

- ¿Cuánto más producto puede ser obtenido de una cantidad dada de insumos?

Replicando el análisis y usando la siguiente figura.

La desviación de la firma 3 es : $0b/0a$. Esto es la Farrell medida de eficiencia técnica referida a la producción:



IN75K
MICROECONOMIA

Farrell Medida de eficiencia técnica referida a la producción:

$F_o(x,y|C,S) = \max \{ \theta : \theta y \in Y(x|C,S) \}$

- Esta medida y la anterior están relacionadas. Es posible mostrar que
- $F_o(x,y|C,S) = (F_i(y,x|C,S))^{-1}$
- Tomando los siguientes datos

Firm (DMU)	Input x	Output 1 y_1	Output 2 y_2
1	1	2	1
2	1	1	2
3	1	1	1

Para la firma 3
 $F_o(1,1,1|C,S) = \max \theta$
 s.t. $z_1 2 + z_2 1 + z_3 1 \geq \theta 1$
 $z_1 1 + z_2 2 + z_3 1 \leq \theta 1$
 $z_1 1 + z_2 1 + z_3 1 \leq 1$
 $z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0$

13

IN75K
MICROECONOMIA

- Donde $F_o(1,1,1|C,S)=1.5$
- Donde $F_o(1,2,1|C,S)=1$
- Ineficiencia implica:
 $F_o(x,y|C,S) \geq 1$
- Eficiencia implica:
 $F_o(x,y|C,S)=1$
- Déficit de producción implica:
 $\sum_{k=1}^K z_k y_{km} > y_{km} \cdot F_o(x^k, y^k | C, S)$

¿Qué pasa con el punto 4 en la figura?

14

IN75K
MICROECONOMIA

Descomposición de la eficiencia técnica en producción

- Eficiencia de Escala en Producción

$$S_o(y, x|S) = F_o(x, y|C, S) / F_o(y, x|V, S)$$

- tarea:
- Mostrar que para la firma 2:
 $F_o(2, 1.5|V, S)=1$
 $S_o(2, 1.5|S)=4/3$
- Obtener una medida de congestión de productos

15

IN75K
MICROECONOMIA

Medidas de eficiencia con precios

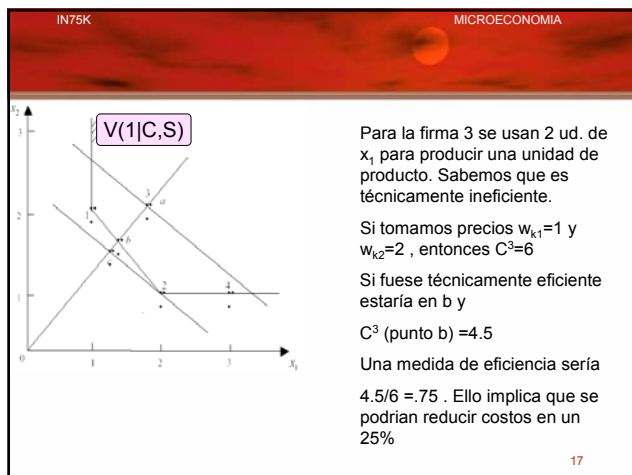
- Sabemos que el costo total puede obtenerse como :

$$C^k = \sum_{n=1}^N w_{kn} x_{kn} = w^k x^k$$

- Por ejemplo para los datos en la tabla:

Firm (DMU)	Input 1 x_1	Input 2 x_2	Output y	Total Cost
1	1	2	1	5
2	2	1	1	4
3	2	2	1	6
4	3	1	1	5

16



IN75K MICROECONOMIA

- El mínimo costo para la firma 3 puede ser obtenido de la solución LP: $C(1,1,2 | C, S) = \min 1x_1 + 2x_2$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &\geq 1, \\ z_1 + z_2 + z_3 &\leq x_1 \\ z_1 + z_2 + z_4 &\leq x_2 \\ z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0, z_4 \geq 0, \end{aligned}$$

La cual da un $C(1,1,2|C,S)=4$.

Aquí la solución permite cambiar la mezcla de insumos

18

IN75K MICROECONOMIA

- El problema general de minimización de costos es:

$$C(y, w | C, S) = \min \left\{ \sum_{n=1}^N w_n x_n : (x_1, \dots, x_n) \in V(y | C, S) \right\}$$
- Donde la eficiencia en costo puede ser medida por:
- $O_i(y, xw | C, S) = C(y, w | C, S) / wx = \partial a / \partial c$ en la figura

19

IN75K MICROECONOMIA

Productividad y Eficiencia

- Usemos ahora una medida de eficiencia económica relativa a la producción. Sabemos que la función de ingresos puede ser definida como:
 - $R(p, x) = \max_y \{py : y \in Y(x)\}$
- De manera que podemos obtener una función de ingreso para cada firma k , $R^k(p, x^k)$ y donde todas enfrentan los mismos precios.

20

IN75K
MICROECONOMIA

Ejemplo

Firm (DMU)	Input x	Output 1 y_1	Output 2 y_2	Total Revenue
1	1	2	1	4
2	1	1	2	5
3	1	1	1	3

La solución a este problema es 5 aún cuando el ingreso observado sea solo 3 y por lo tanto la firma 3 sería ineficiente

El problema es:
 $R(p, x | C, S) = \max_{y \in Y(x | C, S)} \{py\}$

Para la firma 3 resolvemos:

$$R(1, 1, 1 | C, S) = \max 1y_1 + 2y_2$$

s.t.

$$z_1 2 + z_2 1 + z_3 1 \geq y_1$$

$$z_1 1 + z_2 2 + z_3 1 \geq y_2$$

$$z_1 1 + z_2 1 + z_3 1 \leq 1$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0$$

IN75K
MICROECONOMIA

Medidas de eficiencia en la producción

- En general una medida completa de eficiencia puede ser definida por: $O_o(x, y, p | C, S) = R(x, p | C, S) / py$.
- Que en el caso de la figura sería: $O_o(1, 1, 1, 2 | C, S) = 0c / 0a = 5 / 3$.
- La eficiencia económica implica ubicarse en un punto como **c** en la figura, mientras que la eficiencia técnica implica **b**.
- Sabemos usando el indicador de Farrell que la eficiencia técnica es: $F_o(1, 1, 1 | C, S) = 0b / 0a = 1.5$
- Por lo que es posible definir un concepto de asignación eficiente en la producción como:

$$A_o(x, y, p | C, S) = O_o(x, y, p | C, S) / F_o(x, y | C, S)$$

IN75K
MICROECONOMIA

- Por lo tanto el indicador de Farrell de descomposición de eficiencia en la producción puede ser escrito como:

$$O_o(x, y, p | C, S) = A_o(x, y, p | C, S) \cdot F_o(x, y | C, S)$$

- El cual en términos de la figura sería : $0c / 0a = 0c / 0b \cdot 0b / 0a$.
- O numericamente hablando: $5/3 = ((5/3)/(3/2)) \cdot (3/2)$.

IN75K
MICROECONOMIA

Usando las funciones distancias para analizar productividad

El Malmquist índice de productividad puede ser definido como:

$$M_o^t = D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1} | C, S) / D_o^t(x^t, y^t | C, S)$$

Es decir la relación entre dos funciones distancia radial

En la figura las soluciones para las funciones distancias son:

$$D_o^t(1, 1 | C, S) = 1 \quad \text{y} \quad D_o^t(1.5, 2 | C, S) = 2/1.5$$

$$M_o^t = 2/1.5 = 4/3$$

- Para realizar esto debemos generar una frontera tecnológica de referencia con los datos del punto t.
- Para obtener distancias usamos las medidas de eficiencia técnica ya que estas son el recíproco de la función distancia radial: $D_o(x, y | C, S) = 1 / (F_o(x, y | C, S))$
- De esta manera podemos obtener la función distancia como la solución al problema LP: $D_o^t(1, 1 | C, S))^{-1} = \max \theta$
s.t. $z \geq \theta$
 $z \leq 1$
 $z \geq 0$

25

Utilización de capacidad

- Podemos utilizar las funciones distancia para analizar utilización de capacidad.
- Sabemos que $f(x) = \max \{y: y \in Y(x)\}$
- La capacidad se puede definir por: $\hat{f}(x_f) = \max \{f(x_f, x_v) : x_v \geq 0\}$
- Donde el factor x_f está fijo
- La tasa de utilización de la capacidad a la Johansen está dada por: $CU(y, x) = f(x_f, x_v) / \hat{f}(x_f) = f(x) / \hat{f}(x_f) \leq 1$
- Como la función distancia puede ser descrita como $D_o(x, y) = y / f(x)$,
- La utilización en término de las funciones distancias sería:

26

En términos de productos múltiples

Tasa de utilización = $CU(y, x) = \hat{D}_o(x_f, y) / D_o(x, y)$

Donde: $\hat{D}_o(x_f, y) = \min \{\theta : \frac{y}{\theta} \in Y(x_v, x_f), x_v \geq 0\}$

27