

## Productividad y Eficiencia

**La siguiente presentación está basada en los numerosos desarrollos de**

**Färe, R and S. Grosskopf  
Oregon State University**

1

Las medidas de eficiencia y productividad no dicen que tan bien lo está haciendo una firma relativo a un benchmark. ¿Cómo lo está haciendo una empresa respecto a otra? ¿Esta ofreciendo el producto o servicio al más bajo costo? . Las medidas deberían ser flexibles y capaces de evaluar situaciones aún donde las señales económicas o financieras tales como beneficios o ingresos sean inapropiadas o donde no existan. Algunas de estas técnicas nos entregan esa capacidad.

,

2

En las prácticas de medir productividad el desempeño es relativo. Un Benchmark para una operación individual se construye sobre los resultados observados en operaciones similares. Un Benchmark es una frontera de mejores prácticas.

3

## Benchmarks: la frontera de mejores prácticas (tecnología)

- Una tecnología particular puede ser construida para bancos, granjas, farmacias, servicios públicos, etc. o en general para cualquier institución que tome decisiones y que use insumos para producir productos.
- Una frontera es construida de observaciones insumo-producto. Por ejemplo un número de insumos llamado:

$$X_R, M = 1, \dots, N$$

- O el vector de insumos

$$X = (X_1, \dots, X_N).$$

4

- Para cada uno de estos insumos, se tendrían datos no negativos. Por ejemplo, para las granjas, los insumos incluirían los datos de hectareas de tierra, horas del trabajo en la granja, semillas, etc. Para una empresa de servicios los insumos podrían ser los trabajadores, los gerentes, los metros cuadrados de espacio de la oficina, etc. Como principio general, estos insumos deben incluir todos los recursos usados por el tomador de decisión, y deben ser medidas tan exactamente como sea posible. Hay que tener presente que errores en los datos pueden afectar los resultados.

5

- Los productos pueden ser descritos como:

$$y_m, m = 1, \dots, M$$

- O en términos vectoriales:

$$y = (y_1, \dots, y_M).$$

- Los datos para estos productos deben ser números no negativos. Para nuestro ejemplo de la granja, los productos pudieron incluir sacos de maíz, de trigo, etc. En el ejemplo de la empresa de servicio los productos podrían ser el número de solicitudes recibidas, el número de atenciones, prestaciones, etc.

6

- En construir la frontera de mejores prácticas e identificar un benchmark se asume, que los datos incluyen un número de empresas o de observaciones:

$$k=1, \dots, K$$

Donde cada observación debiera incluir datos de productos e insumos.

$$x^k = (x_{k1}, \dots, x_{kN})$$

$$y^k = (y_{k1}, \dots, y_{kM}),$$

7

#### Tipos de tecnologías de referencia

- Un set de requerimientos de insumos  $V(y)$  muestra las combinaciones de insumos que pueden usarse para producir un vector de productos.
- El set de posibilidades de producción  $Y(x)$  muestra las combinaciones de productos que pueden producirse con un vector de insumos  $x$ .
- Un grafo  $T$  muestra las combinaciones  $x$ ,  $y$  que son factibles.

8

### Un ejemplo numérico: El set de requerimientos de insumos

•  $V(y | C, S) \quad \{(x_1, \dots, x_N) :$

$$\sum_{k=1}^K z_k y_{km} \geq y_m, m = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{k=1}^K z_k x_{kn} \leq x_n, n = 1, \dots, N,$$

$$z_k \geq 0, k = 1, \dots, K\},$$

- Donde los  $z$  son la intensidad de uso de la variable

9

### La siguiente tecnología de referencia

Firm (DMU)	Input 1 $x_1$	Input 2 $x_2$	Output $y$
1	1	2	1
2	2	1	1
3	2	2	1

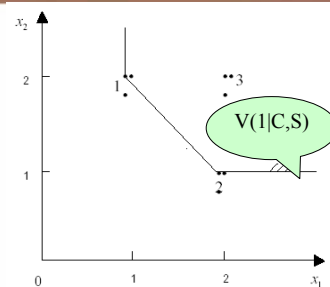
La tabla muestra que hay tres firmas y que usan insumos 1 x y 2 x para producir una producto  $y$ . La cantidad del insumo uno usado por la firma dos es  $x_{21} = 2$ , por ejemplo.

10

Sustituyendo los datos en la ecuación se tiene

$$V(y|C,S) = \{(x_1, x_2) : \begin{aligned} z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 1 + z_3 \cdot 1 &\geq y, & (a) \\ z_1 \cdot 1 + z_2 \cdot 2 + z_3 \cdot 2 &\leq x_1, & (b) \\ z_1 \cdot 2 + z_2 \cdot 1 + z_3 \cdot 2 &\leq x_2, & (c) \\ z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0 \end{aligned}\}.$$

11



Podemos también construir observaciones hipotéticas convexas que están entre 1,2

Para el punto (1,2)

$$z_1 = 1, z_2 = z_3 = 0,$$

$$z_2 = 1, z_1 = z_3 = 0,$$

$$z_1 = z_2 = 1/2 \text{ and } z_3 = 0,$$

12

- De hecho todas las combinaciones convexas 1, 2, y 3 son factibles. Además, debido a las desigualdades (más que a las igualdades) en (b) y (c) todo el noreste de los puntos de la línea segmento entre 1 y 2 son también factibles (pero hipotéticos) del conjunto de requerimientos de insumos
- De la figura es fácil ver el benchmark de este requerimiento de insumos : son los puntos que forman la cota inferior del set , es decir, representan las firmas reales o hipotéticas que utilizan los menores insumos posibles para producir los mismos productos.

13

### Propiedades de disponibilidad del conjunto de insumos

- Recordemos los requisitos de disponibilidad de insumos:
- El concepto de fuerte disponibilidad de insumos (S) implica que más insumos no pueden producir menos (Prod mg no negativa, es decir dejamos fuera la congestión de insumos, carretera, pesca, fertilizantes).
- Para permitir congestión deberíamos usar un supuesto diferente (Disponibilidad débil de insumos, W).

$$x \in V(y | C, W) \Rightarrow x\lambda \in V(y | C, W), \text{ para } \lambda > 1$$

- Ello implica que incrementos proporcionales en los insumos no reducen la producción

14

- En el modelo anterior se puede cambiar el requerimiento de fuerte disponibilidad de insumos por el de débil de esta manera:

$$V(y|C,W)= \{(x_1, \dots, x_N) : \\ \sum_{k=1}^K z_k y_{km} \geq y_m, m = 1, \dots, M, \\ \sum_{k=1}^K z_k x_{kn} = x_n, n = 1, \dots, N, \\ z_k \geq 0, k = 1, \dots, K\}.$$

- Donde las desigualdades se cambiaron por igualdades
- TAREA GRAFICAR

15

- Los dos modelos anteriores dan los dos extremos con respecto a la disponibilidad de insumos. En el primer modelo, todas los insumos son fuertemente o libremente disponible, mientras que en el segundo ninguno de los insumos son fuertemente disponibles.
- Uno puede construir casos intermedios restringiendo solamente algunos de los insumos para ser libremente disponible, por ejemplo, si uno cree que algunos insumos pueden disponerse sin ningún costo del recurso, utilizaría las desigualdades para esos casos. Si usted cree que otros insumos pueden causar congestión, entonces se utilizarían las igualdades para caracterizar esas restricciones.

16

Por ejemplo aquí los primeros  $\hat{N}$  insumos pueden causar congestión

$$\sum_{k=1}^K z_n x_{kn} = x_n, n = 1, \dots, \hat{N}$$

$$\sum_{k=1}^K z_k x_{kn} \leq x_n, n = \hat{N} + 1, \dots, N,$$

17

### ¿Cómo modelar retornos a escala?

- El set de requerimientos de insumos con retornos constantes a escala puede escribirse como:

$$V(\theta y | C, S) = \theta V(Y | C, S) \quad \theta > 0$$

- El particular set de requerimientos de insumos del ejemplo satisface retornos constantes a escala constantes debido a la restricciones sobre las  $z$ , para las cuales solo se requiere que no sean negativas,  $1, \dots, z_k \geq 0 \quad k=1..K$ , es decir, ellas pueden ser modificadas hacia arriba y hacia abajo por cualquier escalar positivo  $q$ .

18

- Se sabe que una firma que opera bajo retornos constantes a escala tiene cero utilidades y por lo tanto uno podría querer considerar otros casos. Para ello podríamos definir otra tecnología que incorpore retornos no crecientes como:

$$V(\theta y | N, S) \subseteq \theta V(Y | N, S) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

- Si queremos incrementar los productos debemos incrementar los insumos por una cantidad mayor

19

- Nuestro modelo queda como:

$$V(y | N, S) = \{(x_1, \dots, x_N) :$$

$$\sum_{k=1}^K z_k y_{km} \geq y_m, m = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{k=1}^K z_k x_{kn} \leq x_n, n = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{k=1}^K z_k \leq 1, z_k \geq 0, k = 1, \dots, K\}.$$

- Esto lo podemos ilustrar en la tabla

20

Firm (DMU)	Input $x$	Output $y$
1	1	2
2	2	3

$$V(y|C,S) = \{x :$$

$$z_1 2 + z_2 3 \geq y,$$

$$z_1 1 + z_2 3 \leq x,$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0\},$$

$$V(y|N,S) = \{x :$$

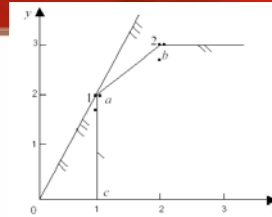
$$z_1 2 + z_2 3 \geq y,$$

$$z_1 1 + z_2 2 \leq x,$$

$$z_1 + z_2 \leq 1,$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0\},$$

## Gráficamente



La tecnología con retornos constantes a escala esta acotada por el eje  $x$  y el rayo que pasa del origen por  $a$ . La tecnología con retornos no crecientes a escala esta acotada por  $oa$ ,  $ab$  y la extensión horizontal del eje de las  $x$  a partir de  $b$ . La tecnología dada por  $V(y|N,S)$  no permite incrementos a escala más allá de  $b$ , pero permite combinaciones convexas entre  $0$  y las observaciones existentes (contracción radial).

La extensión más allá del punto  $b$  sigue de la existencia de fuerte disponibilidad de insumos. Además se observa que :

$$V(y|N,S) \subseteq V(y|C,S)$$

• Si los  $z_k$  se restringen a sumar exactamente uno estamos en presencia de una tecnología que se conoce como retornos variables a escala y específicamente el set de requerimientos de insumos queda como:

$$V(y|v,S) = \{(x_1, \dots, x_K) :$$

$$\sum_{k=1}^K z_k y_{km} \geq y_m, m = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{k=1}^K z_k x_{kn} \leq x_n, n = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{k=1}^K z_k = 1, z_k \geq 0, k = 1, \dots, K\}.$$

Donde en términos de la figura la tecnología con retornos variables a escala está acotada a partir de  $x=1$ . También se puede mostrar que :

$$V(y|v,S) \subseteq V(y|N,S) \subseteq V(y|C,S)$$

## Modelando la tecnología con el conjunto de producción

La tecnología:

$$Y(X|C,S)$$

$$= \{(y_1, \dots, y_M) :$$

$$\sum_{k=1}^K z_k y_{km} \geq y_m, m = 1, \dots, M,$$

$$\sum_{k=1}^K z_k x_{kn} \leq x_n, n = 1, \dots, N,$$

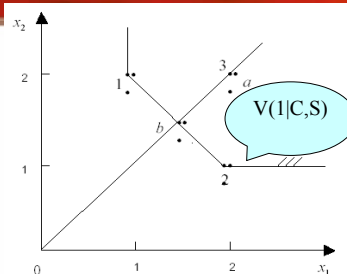
$$z_k \geq 0, k = 1, \dots, K\}.$$



## Medidas de eficiencia

Primero vimos como se construye una tecnología con los datos ahora veamos como medimos eficiencia y que tan bien lo está haciendo una firma. La meta es maximización de beneficios o minimización de costos (dual). Eficiencia requiere el menor uso de recursos. Entre las medidas se usan aquellas que no requieren datos de precios (eficiencia técnica) y aquellas que requieren usos de precios (eficiencia económica)

29



Por ejemplo podemos elegir  $b$  como nuestro benchmark.

La eficiencia técnica la podríamos medir como  $0a/0b$ . Mientras más cercana a uno más eficiente somos. Esta medida es la radial función distancia

$$F_i(x,y|C,S) = \min \{ \lambda > 0 : \lambda x \in V(y|C,S) \}$$

Farrell-Medida de eficiencia técnica

30

- Esto se podría medir para la firma 3 que para producir una unidad usa 2 insumos de  $x_1$  y 2 de  $x_2$

$$F_i(1,2,2|C,S) = \min \lambda$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &\geq 1, \\ z_1 + z_2 + z_3 &\leq \lambda 2, \\ z_1 + z_2 + z_3 &\leq \lambda 2, \\ z_1 &\geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0, \end{aligned}$$

Con solución  $F_i(1,2,2|C,S)$

Es decir podríamos ahorrar un 25% de insumos

- El valor límite de  $F_i$  es uno por lo que:

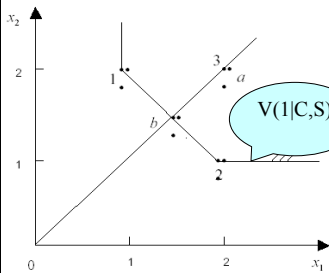
$$0 < F_i(x,y|C,S) \leq 1$$

- y para el caso de la firma técnicamente eficiente:  $F_i(x,y|C,S) = 1$

31

32





$F_i(x,y|C,S) = \min \{\lambda > 0: \lambda x \in V(y|C,S)\}$   
Farrell-Medida de eficiencia técnica

Por ejemplo podemos elegir b como nuestro benchmark.

La eficiencia técnica la podríamos medir como  $0a/0b$ . Mientras más cercana a uno más eficiente somos. Esta medida es la radial función distancia

33

- Esto se podría medir para la firma 3 que para producir una unidad usa 2 insumos de  $x_1$  y 2 de  $x_2$   
 $F_i(1,2,2|C,S) = \min \lambda$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & z_1 + z_2 + z_3 \geq 1, \\ & z_1 + z_2 + z_3 \leq 2, \\ & z_1 + z_2 + z_3 \leq \lambda, \\ & z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0, \end{aligned}$$

Con solución  $F_i(1,2,2|C,S) = 0.75$

Es decir podríamos ahorrar un 25% de insumos

El valor límite de  $F_i$  es uno por lo que:  $0 < F_i(x,y|C,S) \leq 1$   
y para el caso de la firma técnicamente eficiente:

$$F_i(x^k, y^k | C, S) = 1$$

34

35