

# METODOS NUMERICOS PARA RESOLVER MODELOS MACROECONOMICOS DINAMICOS

Carlos Urrutia<sup>1</sup>

Universidad Carlos III de Madrid

Ilades-Georgetown University

Agosto, 1998

---

<sup>1</sup>E-mail: [urrutia@atlas.socsci.umn.edu](mailto:urrutia@atlas.socsci.umn.edu). Debo agradecer a Raphael Bergoeing, Victor Pacharoni, Juan Enrique Suarez y Juan Carlos Zevallos por sus comentarios. Cualquier error restante es responsabilidad exclusiva del autor.

# Contents

Introducción . . . . .	1
1 Primera Sesión . . . . .	2
1.1 El Modelo de Crecimiento Neoclásico . . . . .	2
1.1.1 El Modelo Determinístico Básico . . . . .	2
1.1.2 Equilibrio General Competitivo . . . . .	4
1.1.3 El Problema del Planificador Social . . . . .	5
1.2 Introducción a los Métodos Numéricos . . . . .	5
1.2.1 Solución de Ecuaciones No-Lineales . . . . .	5
1.2.2 Derivadas Numéricas . . . . .	7
1.3 Métodos Iterativos Simples . . . . .	8
1.3.1 Shooting . . . . .	9
1.3.2 Gauss-Seidel . . . . .	10
1.3.3 Resolviendo Directamente el Equilibrio Competitivo . . . .	11
1.3.4 Limitaciones . . . . .	12
2 Segunda Sesión . . . . .	13
2.1 Formulación Recursiva y Programación Dinámica . . . . .	13
2.1.1 Programación Dinámica . . . . .	14
2.2 Iteración de la Función de Valor . . . . .	16
2.2.1 Implementación Numérica . . . . .	17
2.2.2 Resolviendo el Equilibrio Competitivo . . . . .	18
2.3 El Modelo Estocástico . . . . .	19
2.3.1 Iteración de la Función de Valor . . . . .	21
2.3.2 Simulación de las Trayectorias Optimas . . . . .	23
2.3.3 Limitaciones . . . . .	24
3 Tercera Sesión . . . . .	25
3.1 El Modelo Lineal-Cuadrático . . . . .	25
3.1.1 Ecuación de Bellman . . . . .	25
3.1.2 Calculo de la Regla de Decisión Optima . . . . .	27
3.1.3 Iteración de la Matriz de Ricatti . . . . .	27
3.1.4 Simulación de Trayectorias Optimas . . . . .	28
3.1.5 Computación Eficiente . . . . .	28
3.2 Aproximación Lineal-Cuadrática en Torno al Estado Estacionario	30
3.2.1 Resolviendo el Problema del Planificador Social . . . . .	30
3.2.2 Resolviendo el Equilibrio Competitivo . . . . .	32
3.2.3 Limitaciones . . . . .	36

Bibliografía . . . . .	37
Apéndices . . . . .	38
A Ejercicios de Repaso . . . . .	38
A.1 Primera Sesión . . . . .	38
A.2 Segunda Sesión . . . . .	39
A.3 Tercera Sesión . . . . .	39
B Librería de Programas en Matlab . . . . .	42

## Introducción

Durante el mes de julio de 1998 tuve a cargo el curso de Macroeconomía Avanzada, en el Post-Grado de Ilades-Georgetown University, en Santiago de Chile. El objetivo del curso fue introducir algunos métodos numéricos para resolver modelos dinámicos de equilibrio general, y estas notas recogen lo principal de su contenido.

Los modelos dinámicos han cobrado mayor importancia en la literatura macroeconómica reciente, especialmente tras la publicación del artículo de Kydland y Prescott (1982). Lamentablemente, su uso se ha visto limitado por la carencia de soluciones analíticas simples, lo que obliga a aproximar numéricamente las trayectorias óptimas de las principales variables. En este curso presenté algunos de los métodos desarrollados en esa línea, con énfasis en la programación dinámica y el método de aproximación lineal-cuadrática.

Si bien en cada sesión presenté brevemente la base teórica detrás de cada método, el énfasis del curso fue aplicado. La idea fue que los alumnos trabajaran con problemas concretos escribiendo sus propios programas. Los ejercicios y programas (en lenguaje MATLAB) presentados en el apéndice al ...nal del documento permiten al lector sentarse frente al computador y empezar a experimentar con estos métodos.

Dado el carácter introductorio del curso no fue posible cubrir varios de los avances más recientes en este campo. En particular, dejé de lado aquellos modelos basados en residuos ponderados, incluyendo el de expectativas parametrizadas. Algunas referencias útiles al respecto son los artículos de McGrattan (1994 y 1998) y Den Haan y Marcet (1990). Asimismo, no se cubrió el tema de computación de modelos con agentes heterogéneos. Nuevamente, el artículo de Rios-Rull (1998) es una excelente introducción al tema.

Debo terminar agradeciendo a mis colegas de Ilades-Georgetown University por la invitación que dio origen a este curso, así como a los alumnos que siguieron con paciencia cada una de las sesiones. Espero haberles transmitido como mensaje que estos modelos dinámicos de equilibrio general son útiles y, armado de las herramientas adecuadas, pueden dar respuestas a problemas importantes.

## 1. Primera Sesión

Esta primera sesión tiene tres objetivos. Primero, introducir un modelo dinámico simple de equilibrio general con fundamentos microeconómicos. Resolver este modelo y sus posibles extensiones será el tema central del curso. Segundo, familiarizar a los participantes con algunas técnicas básicas de análisis numérico necesarias para el curso. Finalmente, presentar algunos métodos simples para resolver modelos dinámicos. Estos métodos tienen grandes limitaciones, pero por su sencillez constituyen un buen primer paso para el investigador que busca sentarse frente a la computadora y obtener una respuesta rápida.

### 1.1. El Modelo de Crecimiento Neoclásico

Empecemos describiendo el tipo de modelo que queremos resolver. Un desarrollo fundamental a la base de la Macroeconomía moderna es el llamado Modelo de Crecimiento Neoclásico. En este modelo, las decisiones de los agentes son modeladas de manera explícita en un contexto intertemporal. A continuación presentaremos el modelo determinístico básico, dejando para la próxima sesión el modelo con incertidumbre.<sup>2</sup>

#### 1.1.1. El Modelo Determinístico Básico

Existen dos tipos de agentes en esta economía. En primer lugar, tenemos un número grande de consumidores idénticos, que viven un infinito número de períodos y que podemos modelar como un único agente representativo. En segundo lugar, tenemos un número grande de firmas idénticas que producen el único bien de la economía, y que podemos modelar también como una única firma representativa.

El agente representativo tiene preferencias descritas por la función de utilidad intertemporal:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (1.1)$$

en donde  $u$  es una función de utilidad de un período que asumimos cóncava ( $u_c > 0$  y  $u_{cc} < 0$ ) y  $\beta$  es un factor de descuento que asumimos constante.

---

<sup>2</sup>Una presentación más detallada de este modelo y sus extensiones puede encontrarse en Urrutia (1996). Otra referencia útil, pero más concisa, es el artículo de Cooley y Prescott (1995).

Dicho consumidor posee todo el capital y trabajo (normalizado a una unidad) en la economía, que renta a las firmas. Al mismo tiempo compra a estas firmas el único bien, que puede ser usado tanto para consumo como inversión. Pero el agente representativo es también dueño de la firma, por lo tanto recibe todos los beneficios que ésta pueda generar.

El consumidor enfrenta entonces la siguiente restricción presupuestaria:

$$c_t + i_t = w_t + r_t k_t + \pi_t \quad (1.2)$$

en donde los gastos en consumo e inversión deben ser iguales a los ingresos (salarios mas renta del capital mas beneficios) en cada período. Nótese que estamos normalizando el precio del único bien para que sea igual a uno en cada período, por lo tanto  $w_t$  y  $r_t$  son precios relativos expresados en unidades del único bien.

El stock de capital del consumidor crece de acuerdo a:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad (1.3)$$

en donde  $\delta$  es una tasa constante de depreciación.

De otro lado está la firma representativa, que renta capital y trabajo para producir el único bien en la economía, usando la función de producción agregada con retornos a escala constantes:

$$Y_t = F(K_t; L_t) \quad (1.4)$$

en donde asumimos que  $F_K; F_N > 0$ ,  $F_{KK}; F_{NN} < 0$  y  $F_{KN} > 0$ . Puesto que la oferta de trabajo es inelástica y normalizada en una unidad, reescribimos:

$$Y_t = F(K_t; 1) = f(K_t) \quad (1.5)$$

con  $f_k > 0$  y  $f_{kk} < 0$ .

El objetivo de esta firma es maximizar beneficios  $\pi_t$  en cada período, en donde:

$$\pi_t = Y_t - w_t - r_t K_t \quad (1.6)$$

normalizando nuevamente el precio del único bien para que sea uno en cada período. Podemos demostrar que con rendimientos a escala constantes los beneficios van a ser siempre iguales a cero.

### 1.1.2. Equilibrio General Competitivo

Un Equilibrio General Competitivo (EGC) para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades  $c_t$ ,  $i_t$ ,  $k_{t+1}$ ,  $Y_t$  y  $K_t$  y los precios  $w_t$  y  $r_t$  tales que:

i) Dados  $k_0 > 0$ ,  $w_t$  y  $r_t$ , las secuencias  $c_t$ ,  $i_t$  y  $k_{t+1}$  resuelven el problema:

$$\max_{t=0} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t:} \quad c_t + i_t &= w_t + r_t k_t & 8t \\ k_{t+1} &= (1 - \delta) k_t + i_t & 8t \end{aligned}$$

ii) En cada período  $t$ , dados  $w_t$  y  $r_t$ , los valores  $Y_t$  y  $K_t$  resuelven el problema:

$$\max Y_t - w_t - r_t K_t \quad (1.8)$$

$$\text{s.t:} \quad Y_t = f(K_t)$$

iii) En cada período  $t$ , hay igualdad entre oferta y demanda:

$$Y_t = c_t + i_t \quad (1.9)$$

$$K_t = k_t \quad (1.10)$$

En este curso vamos a revisar un conjunto de métodos para aproximar el Equilibrio Competitivo, es decir, para encontrar valores numéricos para las secuencias de consumo, inversión, capital, producto y precios que satisfagan la definición anterior. Esto requiere en primer lugar especificar las formas funcionales para la función de utilidad  $u(c)$  y la función de producción  $f(K)$ , así como valores para todos los parámetros del modelo (incluyendo  $\beta$  y  $\delta$ ). Los criterios para asignar esos valores dependen ya del investigador y no serán cubiertos en este curso.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Una introducción al método de calibración y al debate con la econometría tradicional puede encontrarse en Cooley y Prescott (1995) y Bergoeing (1998).

### 1.1.3. El Problema del Planificador Social

Consideremos por un momento una economía como la descrita anteriormente, pero en la cual las decisiones son tomadas por un planificador social o un dictador benevolente. Este planificador busca maximizar la utilidad del agente representativo (1.1), sujeto a las restricciones tecnológicas dadas por (1.3) y (1.4). Las cantidades resultantes de esta maximización son Óptimos de Pareto, en el sentido que no es posible aumentar la utilidad de algun agente sin reducir la de otro.

Formalmente, un Óptimo de Pareto (OP) para esta economía es un conjunto de secuencias para las cantidades  $c_t$ ,  $i_t$  y  $k_{t+1}$  que, dado  $k_0 > 0$ , resuelven el problema del planificador social:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{s.t:} \quad & c_t + i_t = f(k_t) \quad \forall t \\ & k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad \forall t \end{aligned} \quad (1.11)$$

Podemos demostrar que si no existen distorsiones tales como impuestos o externalidades, todo EGC es un OP y para cada OP existe un sistema de precios que lo hace un EGC. Esta equivalencia entre el problema del planificador social y los problemas de familias y firmas competitivas es una aplicación directa de los Teoremas del Bienestar. En la práctica, nos permite hallar el EGC resolviendo primero el problema del planificador social, que es mas sencillo, y luego encontrando los precios.

## 1.2. Introducción a los Métodos Numéricos

A continuación veremos algunos procedimientos numéricos que más adelante serán útiles para el desarrollo del curso. En particular, veremos como aproximar numéricamente la solución de un sistema de ecuaciones no-lineales y como calcular la matriz Jacobiana de una función, sin necesidad de conocer las expresiones analíticas para las derivadas.

### 1.2.1. Solución de Ecuaciones No-Lineales

Varios de los métodos que vamos a revisar en este curso se reducen esencialmente a resolver un sistema de ecuaciones, posiblemente no-lineales. Sea  $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$



un vector columna de  $n$  componentes, y  $F(x)$  una función que transforma valores de  $R^n$  en  $R^n$ . Queremos encontrar algún vector  $\hat{x}$ , no necesariamente único, tal que  $F(\hat{x}) = 0$ . Dado que no podemos resolver analíticamente la ecuación, vamos a aproximar numéricamente su solución mediante un vector que denotamos por  $\hat{x}$ .

Para ello, un procedimiento sencillo se conoce como el método de Newton-Raphson. La idea es usar una expansión de Taylor de la función  $F$  en torno a la solución aproximada  $\hat{x}$ , del tipo

$$F(x) \approx F(\hat{x}) + J(\hat{x})(x - \hat{x}) + \text{términos de orden mayor} \quad (1.12)$$

en donde  $J(\hat{x})$  es la matriz Jacobiana con las derivadas parciales de  $F$  evaluadas en  $\hat{x}$ :

$$J(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\hat{x}) \end{bmatrix}$$

y  $F_{ij}(\hat{x}) = \frac{\partial F_i(\hat{x})}{\partial x_j}$ .

Una aplicación del Teorema de Taylor nos asegura que, conforme  $\hat{x}$  se acerca al valor  $x$ , los términos de orden mayor tienden a cero. Luego, manipulando (1.12) evaluada en  $\hat{x}$  obtenemos:

$$\hat{x} \approx \hat{x} - J(\hat{x})^{-1} F(\hat{x}) \quad (1.13)$$

que es la base del método de Newton-Raphson.

El algoritmo en sí sigue los siguientes pasos. Primero debe proponerse una solución  $x_0$ , usando en lo posible el conocimiento que tengamos acerca de  $F$ . Además, debe establecerse un criterio de tolerancia, es decir un valor mínimo para el margen de error que consideramos aceptable. Con  $s = 0$ , iniciamos el siguiente procedimiento iterativo:

1. Calcular el vector  $F(x^s)$  y la matriz  $J(x^s)$ ;
2. Calcular el vector  $x^{s+1}$  usando la siguiente regla:

$$x^{s+1} = x^s - J(x^s)^{-1} F(x^s)$$

3. Evaluar la norma o distancia  $\|x^{s+1} - x^s\|$ .<sup>4</sup> Si esta distancia es mayor que el criterio de tolerancia establecido, regresar al paso 1 con  $s = s + 1$ . En caso contrario, el procedimiento termina con  $\hat{x} = x^{s+1}$ .

Si empezamos con un candidato  $x_0$  suficientemente cerca de  $\hat{x}$ , puede demostrarse que el método de Newton-Raphson converge a dicha solución. Sin embargo, si empezamos lejos de  $\hat{x}$  el método convergerá a otra solución (en caso de que esta no sea única) o bien divergerá, es decir la distancia  $\|x^{s+1} - x^s\|$  se irá haciendo cada vez mayor. De ahí la importancia de probar distintos valores para  $x_0$  antes de aventurar una solución definitiva.

Otra desventaja de este método es que requiere tener expresiones analíticas para todas las derivadas parciales de  $F$ , a fin de calcular  $J(x^s)$  en cada iteración. Un método alternativo al Newton-Raphson, conocido como el método de secante, es similar al anterior en cada paso con la excepción de que usa derivadas numéricas para aproximar  $J(x^s)$ . Pese a ser más sencillo de implementar, el método de secante es menos preciso, y en ocasiones resulta más difícil obtener convergencia.

### 1.2.2. Derivadas Numéricas

Queremos obtener una aproximación numérica para la matriz Jacobiana  $J(x)$ , que descomponemos en sus  $n$  columnas  $J(x) = [J_1(x) \ J_2(x) \ \dots \ J_n(x)]$  siendo  $J_i(x)$  el vector columna con las  $n$  derivadas parciales de la función  $F$  con respecto a  $x_i$ .

Sea  $h$  es un vector columna de  $n$  componentes (incremento). Cuando los valores de  $h$  son pequeños, podemos usar la expansión de Taylor:

$$F(x_1 + h_1; x_2; \dots; x_n) \approx F(x) + J_1(x) h_1$$

$$F(x_1; x_2 + h_2; \dots; x_n) \approx F(x) + J_2(x) h_2$$

---

<sup>4</sup> Hay varias maneras de definir el concepto de distancia entre dos vectores de dimensión  $n$ . Los más usados son la norma Euclídeana:

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

y la llamada sup-norma:

$$\|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

Nótese que cuando  $n = 1$ , ambas fórmulas se reducen al valor absoluto habitual.

.....

$$F(x_1; x_2; \dots; x_n + h_n) \approx F(x) + J_n(x) h_n$$

de donde obtenemos para cada  $i = 1; \dots; n$

$$J_i(x) \approx \frac{1}{h_i} [F(x_1; \dots; x_i + h_i; \dots; x_n) - F(x)] \quad (1.14)$$

Alternativamente, podemos aproximar numéricamente la matriz Jacobiana usando la derivada por el lado izquierdo:

$$J_i(x) \approx \frac{1}{h_i} [F(x) - F(x_1; \dots; x_i - h_i; \dots; x_n)] \quad (1.15)$$

o, tomando  $x$  como el punto medio:

$$J_i(x) \approx \frac{1}{2h_i} [F(x_1; \dots; x_i + h_i; \dots; x_n) - F(x_1; \dots; x_i - h_i; \dots; x_n)] \quad (1.16)$$

Esta última fórmula es considerada más precisa, a menos que exista una discontinuidad en la función  $F$  evaluada en  $x$ .

Al igual que el criterio de tolerancia, la elección del vector de incrementos  $h$  es arbitraria. Nuevamente, conviene asegurar la respuesta probando con valores progresivamente más pequeños, hasta que el valor de las derivadas se estabilice.

### 1.3. Métodos Iterativos Simples

Veamos ahora algunos métodos sencillos para calcular el Equilibrio Competitivo en un modelo determinístico similar al presentado a comienzos del curso. Empezamos trabajando con el problema del planificador social (1.11). Analizando las condiciones de primer orden del problema, podemos demostrar que la trayectoria óptima para el capital  $k_t$  satisface en cada período la ecuación de Euler:

$$\frac{u[f(k_t) - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t]}{-u[f(k_{t+1}) - k_{t+2} + (1 - \delta)k_{t+1}]} = f_k(k_{t+1}) + (1 - \delta)$$

y converge monotónicamente hasta su valor de estado estacionario, dado por:

$$k^* = f_k^{-1} \left( \frac{1}{1 \pm \beta} \right) \quad (1.17)$$

Podemos reescribir la ecuación de Euler como:

$$f(k_{t+2}; k_{t+1}; k_t) = 0 \quad (1.18)$$

y el problema se reduce a resolver la ecuación en diferencias no-lineal (1.18) de segundo orden en  $k_t$ , con una condición inicial ( $k_0 > 0$  dado) y una condición final,  $k^*$ .

### 1.3.1. Shooting

Un método sencillo para resolver el problema anterior se conoce como shooting. El método supone que la economía alcanza su estado estacionario en un número finito  $T$  de periodos, fijado arbitrariamente al comienzo. También proponemos un valor inicial para  $k_1$  (denotado por  $k_1^0$ ) e iniciamos la siguiente iteración, con  $s = 0$ :

1. Dados  $k_0$  y  $k_1^s$ , hallar  $k_2^s$  resolviendo:

$$f(k_0; k_1^s; k_2^s) = 0$$

usando Newton-Raphson o algún otro método numérico.

2. Calcular  $k_3^s; \dots; k_T^s$  resolviendo recursivamente:

$$f(k_1^s; k_2^s; k_3^s) = 0$$

$$\vdots$$

$$f(k_{T-2}^s; k_{T-1}^s; k_T^s) = 0$$

3. Evaluar  $\|k_1^s - k^*\|$ . Si esta distancia es mayor que el criterio de tolerancia acordado, regresar al paso 1, con  $s = s + 1$  y un nuevo candidato  $k_1^{s+1}$ . En caso contrario, el procedimiento termina con la solución  $k_t = k_t^s$ .

El tercer paso verifica si la trayectoria  $k_t^s$  calculada converge hacia el valor de estado estacionario  $k^*$ , que podemos calcular a partir de (1.17). Si no converge, cambiamos el valor de  $k_1$  y volvemos a recalcular la secuencia, hasta obtener

convergencia. Nótese que una vez obtenida la secuencia de valores para  $k_t$  podemos calcular las trayectorias para  $c_t$ ,  $y_t$ ,  $w_t$ ,  $r_t$  y cualquier otra variable de interés, usando las siguientes condiciones:

$$y_t = f(k_t) \quad (1.19)$$

$$i_t = k_{t+1} - (1 - \delta) k_t \quad (1.20)$$

$$c_t = y_t - i_t \quad (1.21)$$

$$K_t = k_t \quad (1.22)$$

$$r_t = f_k(K_t) \quad (1.23)$$

$$w_t = f(K_t) - f_k(K_t) K_t \quad (1.24)$$

obtenidas de la definición del Equilibrio Competitivo.

### 1.3.2. Gauss-Seidel

Un problema del método del shooting es que no existe un procedimiento sistemático para ajustar el valor propuesto para  $k_1$  al final de cada iteración. Una alternativa que evita este problema es el método de Gauss-Seidel. Nuevamente suponemos que la economía alcanza su estado estacionario en un número finito  $T$  de períodos. Esta vez, proponemos valores iniciales para toda la secuencia  $k_2^0, \dots, k_T^0$  e iniciamos la siguiente iteración, con  $s = 0$ :

1. Dados  $k_0$  y  $k_2^s$ , hallar  $k_1^{s+1}$  resolviendo:

$$a_3(k_0; k_1^{s+1}; k_2^s) = 0$$

usando Newton-Raphson o algún otro método numérico.

2. Calcular  $k_2^{s+1}, \dots, k_T^{s+1}$  resolviendo recursivamente:

$$a_3(k_1^{s+1}; k_2^{s+1}; k_3^s) = 0$$

$$\vdots$$

$$a_3(k_{T-2}^{s+1}; k_{T-1}^{s+1}; k_T^s) = 0$$

3. Evaluar  $|k_T^s - k^a|$ . Si esta distancia es mayor que el criterio de tolerancia acordado, regresar al paso 1, con  $s = s + 1$ . En caso contrario, el procedimiento termina con la solución  $k_t = k_t^{s+1}$ .

El tercer paso verifica nuevamente si la trayectoria  $k_t^s$  calculada converge hacia el valor de estado estacionario  $k^a$ . Si no converge, nótese que ya no necesitamos volver a proponer una secuencia de valores iniciales  $k_2^{s+1}; \dots; k_T^{s+1}$ , pues estos se obtienen de la última iteración (segundo paso).

### 1.3.3. Resolviendo Directamente el Equilibrio Competitivo

En ciertas aplicaciones en las cuales los teoremas del bienestar no se cumplen<sup>5</sup>, es necesario resolver directamente el Equilibrio Competitivo. Para ello, trabajamos con la ecuación de Euler obtenida del problema del consumidor (1.7):

$$\frac{u[w_t + r_t k_t - k_{t+1} + (1 - \delta) k_t]}{-u[w_{t+1} + r_{t+1} k_{t+1} - k_{t+2} + (1 - \delta) k_{t+1}]} = r_{t+1} + (1 - \delta)$$

una ecuación en diferencias de segundo orden en  $k_t$  que depende de la secuencia de precios  $r_t$  y  $w_t$ :

$$\Phi(k_{t+2}; k_{t+1}; k_t; w_t; w_{t+1}; r_t; r_{t+1}) = 0 \quad (1.25)$$

También tomaremos en cuenta las condiciones de equilibrio (1.22), (1.23) y (1.24).

Un método simple para resolver este problema implica una doble iteración. Primero, siempre suponiendo que en  $T$  períodos se llega al estado estacionario, proponemos una secuencia inicial para el capital agregado  $K_0^0; K_1^0; \dots; K_T^0$ , cuidando que  $K_0^0 = k_0$  y que  $K_T^0 = K^a$ . Luego, seguimos el siguiente algoritmo (primera iteración), con  $s = 0$ .

1. Calcular todas las secuencias de precios usando (1.23) y (1.24).
2. Dados esos precios, resolver la ecuación de Euler (1.25) usando el método de shooting o de Gauss-Seidel (segunda iteración) y obteniendo una solución  $k_0^s; k_1^s; \dots; k_T^s$ .
3. Verificar si  $|k(K_0^s; K_1^s; \dots; K_T^s) - (k_0^s; k_1^s; \dots; k_T^s)|$  es menor al criterio de tolerancia especificado. De ser así, concluye el algoritmo. En caso contrario, regresar al paso 1 con  $s = s + 1$  y una nueva secuencia  $K_t^{s+1} = \frac{1}{2}(K_t^s + k_t^s)$ .

<sup>5</sup>Estas aplicaciones incluyen modelos con distorsiones tales como impuestos o dinero, así como modelos con decisiones discretas y otras no-convexidades.

El último paso verifica que la condición de igualdad entre oferta y demanda de capital (1.22) se cumpla en cada período. De no ser así, reiniciamos el proceso con una nueva secuencia de capital, obtenida como un promedio ponderado de la secuencia propuesta al principio de la iteración y la obtenida como resultado de la misma.

#### 1.3.4. Limitaciones

Hemos presentado un conjunto de métodos iterativos relativamente simples que permiten resolver un Equilibrio Competitivo. Uno puede preguntarse si es necesario revisar métodos más complejos, y la respuesta es afirmativa. Lamentablemente, los métodos presentados en esta sesión tienen importantes limitaciones para el trabajo cuantitativo.

Una primera limitación es el número de variables. Algunas extensiones del Modelo de Crecimiento Neoclásico, en los cuales hay otras variables de estado además del stock de capital, requieren resolver sistemas de ecuaciones en diferencias con más de una variable. Ello en principio podría hacerse con múltiples iteraciones, una para cada variable, pero el proceso sería lento e ineficiente.

En segundo lugar, estos métodos solo sirven para modelos determinísticos, pues no existe una manera sistemática de introducir incertidumbre al momento de la computación. Por lo tanto, se requieren métodos alternativos para resolver modelos de ciclos económicos, entre otros.

Por último, estos métodos basados en la ecuación de Euler requieren que las funciones objetivo sean continuas y diferenciables. Esto impide el análisis de soluciones de esquina, decisiones discretas (como trabajar o permanecer desempleado) u otras no-convexidades.

En las próximas sesiones revisaremos métodos numéricos un poco más sofisticados que permitan superar estas limitaciones.

## 2. Segunda Sesión

Esta sesión tiene como objetivo presentar el método de iteración de la función de valor. Para ello, empezamos reformulando la definiciones de equilibrio en términos recursivos y presentando algunos resultados de la literatura sobre programación dinámica. Estos resultados constituyen la base teórica para el método de iteración de la función de valor, que se presenta a continuación para resolver el problema del planificador social en un contexto determinístico. Finalmente, el método es extendido para resolver y simular un modelo estocástico con shocks tecnológicos.

### 2.1. Formulación Recursiva y Programación Dinámica

Un Equilibrio General Competitivo Recursivo es un conjunto de funciones  $v(k; K)$ ,  $c(k; K)$ ,  $i(k; K)$ ,  $k^0(k; K)$ , precios  $w(K)$  y  $r(K)$  y ley de movimiento  $j(K)$  tales que:

i) Dadas las funciones  $w$ ,  $r$  y  $j$ , la función de valor  $v(k; K)$  resuelve la ecuación de Bellman:

$$v(k; K) = \max_{c, i, k^0} \{ f(c) + \beta v(k^0; K) \} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t: } c + i &= w(K) + r(K)k \\ k^0 &= (1 - \delta)k + i \\ K^0 &= j(K) \end{aligned}$$

y las funciones  $c(k; K)$ ,  $i(k; K)$  y  $k^0(k; K)$  son reglas de decisión óptimas para este problema.

ii) Para todo  $K$ , los precios satisfacen las condiciones marginales:

$$r(K) = f'(K) \quad (2.2)$$

$$w(K) = f(K) - f'(K)K \quad (2.3)$$

iii) Para todo  $K$ , hay igualdad entre oferta y demanda:

$$f(K) = c(K; K) + i(K; K) \quad (2.4)$$



iv) Para todo  $K$ , ley de movimiento agregada y comportamiento individual son consistentes:

$$i(K) = k^0(K; K) \quad (2.5)$$

Resolver un Equilibrio Competitivo en su formulación recursiva consiste entonces en encontrar un conjunto de funciones que satisfagan las condiciones anteriores. En particular, una vez encontradas las reglas de decisión óptimas y partiendo de un  $k_0$  dado, podemos reconstruir las secuencias para las principales variables de manera recursiva:

$$\begin{aligned} k_1 &= k^0(k_0; k_0) \\ k_2 &= k^0(k_1; k_1) = k^0(k^0(k_0; k_0); k^0(k_0; k_0)) \end{aligned}$$

y así sucesivamente para  $k_t$ ,  $t = 3; 4; \dots$ . El Principio de Optimalidad asegura que la secuencia resultante es igual a la que obtendríamos resolviendo el equilibrio en forma de secuencias que vimos en la sesión anterior.

De manera similar, definimos un Optimo de Pareto Recursivo como un conjunto de funciones  $v(k)$ ,  $c(k)$ ,  $i(k)$ ,  $k^0(k)$  que resuelven la ecuación de Bellman del planificador social:

$$v(k) = \max_{c; i; k^0} f_u(c) + \beta v(k^0)g \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t: } c + i &= f(k) \\ k^0 &= (1 - \delta)k + i \end{aligned}$$

La equivalencia entre el equilibrio competitivo y el problema del planificador social se sigue manteniendo en este contexto.

### 2.1.1. Programación Dinámica

Las ecuaciones de Bellman (2.1) y (2.6) son ejemplos de un problema más general. Sea  $x$  un vector columna de  $n$  componentes,  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , la función de retorno  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  y la correspondencia  $\phi : X \rightarrow X$ . Con esos elementos, definimos la función de valor  $v : X \rightarrow \mathbb{R}$  como la solución de la ecuación de Bellman:

$$v(x) = \max_y \{ F(x; y) + \beta v(y) \} \quad (2.7)$$

$$s.t.: y \in Y(x)$$

para todo  $x \in X$ . Dada la función de valor, podemos definir la regla de decisión óptima  $g : X \rightarrow X$  como:

$$g(x) = \arg \max_y \{ F(x; y) + \beta v(y) \} \quad (2.8)$$

$$s.t.: y \in Y(x)$$

es decir, la función que satisface:

$$v(x) = F(x; g(x)) + \beta v(g(x))$$

Las propiedades de las funciones  $v$  y  $g$  han sido analizadas en la literatura sobre programación dinámica<sup>6</sup>. En ella, se demuestra que si (i)  $X$  es un conjunto convexo; (ii)  $Y(x)$  es un conjunto compacto y no-vacío, para todo  $x \in X$ ; (iii) la correspondencia  $Y$  es convexa y continua; (iv) la función  $F$  es cóncava, acotada y continua; y  $(\beta) < 1$ ; entonces:

1. existe una única función  $v$  que satisface (2.7);
2.  $v$  es continua, acotada y estrictamente cóncava;
3. existe una única función  $g$  que resuelve (2.8);
4.  $g$  es continua.

En la mayor parte de ejemplos prácticos que veremos, incluyendo el Modelo de Crecimiento Neoclásico, las restricciones impuestas en las preferencias y tecnología aseguran que los supuestos (i)-(v) se cumplen.

Aparte de asegurarnos existencia y unicidad de la solución, el método de programación dinámica nos ofrece un procedimiento para encontrar dicha solución. Definamos el operador  $T : B(X) \rightarrow B(X)$ , en donde  $B(X)$  es el espacio de funciones acotadas definidas en  $X$ , de la siguiente manera:

---

<sup>6</sup>Una referencia completa, aunque bastante técnica, puede encontrarse en Stokey y Lucas (1989).

$$T[v(x)] = \max_y \{f(x; y) + \beta v(y)\} \quad (2.9)$$

$$s.t.: y \in Y(x)$$

Encontrar la función de valor que resuelve (2.7) es equivalente a encontrar un punto fijo del operador  $T$ , es decir, una función  $v$  tal que  $T[v] = v$ .

Bajo ciertas condiciones técnicas, el operador  $T$  es una contracción<sup>7</sup>. Por lo tanto, partiendo de cualquier función  $v^0 \in B(X)$ , la secuencia  $v^n$  definida por:

$$\begin{aligned} v^1 &= Tv^0 \\ v^2 &= Tv^1 = T^2v^0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

converge hacia el punto fijo  $v$ .

## 2.2. Iteración de la Función de Valor

Volvamos ahora al problema del planificador social (2.6) en su forma recursiva. Reemplazando las restricciones en la función objetivo, tenemos:

$$v(k) = \max_{k^0} \{u[f(k) + (1 - \beta)k - k^0] + \beta v(k^0)\} \quad (2.10)$$

$$s.t.: k^0 \in [0; f(k) + (1 - \beta)k]$$

un problema equivalente a la ecuación de Bellman general (2.7) con  $x = k$ ,  $y = k^0$ ,  $F(x; y) = u[f(x) + (1 - \beta)x - y]$  y  $\phi(x) = [0; f(x) + (1 - \beta)x]$ .

De acuerdo con la teoría de la programación dinámica que revisamos brevemente, partiendo de cualquier función  $v^0$  (por ejemplo,  $v^0(k) = 0$ ) la secuencia  $v^n$  definida por

$$v^{n+1}(k) = \max_{k^0} \{u[f(k) + (1 - \beta)k - k^0] + \beta v^n(k^0)\} \quad (2.11)$$

<sup>7</sup>El operador  $T$  es una contracción con módulo  $\beta$  si existe un número  $\beta \in (0; 1)$  tal que  $\|Tf(x) - Tg(x)\| \leq \beta \|f(x) - g(x)\|$  para todo  $f, g \in B(X)$ ,  $x \in X$ .

Las llamadas condiciones de Blackwell suficientes para una contracción son: monotonicidad del operador  $T$ , en el sentido que  $Tf \geq Tg$  si  $f \geq g$  para todo  $x \in X$ , y descuento, en el sentido que existe un número  $\beta \in (0; 1)$  tal que  $T[f + a](x) \leq Tf(x) + \beta a$  para todo  $f \in B(X)$ ,  $x \in X$  y  $a \geq 0$ . Nuevamente, los supuestos (i)-(v) mencionados anteriormente garantizan su cumplimiento.

$$s:t: k^0 \geq [0; f(k) + (1 - \epsilon)k]$$

converge a la solución  $v$  cuando  $n$  tiende a infinito. Esto constituye de por sí un método iterativo en un espacio de funciones; en esta sección veremos como implementarlo numéricamente.

### 2.2.1. Implementación Numérica

Empezamos definiendo una malla de valores para  $k$ , es decir, un vector  $K = (K_1, K_2, \dots, K_p)$  con  $K_1 = K_{\min}$  y  $K_p = K_{\max}$ . Por simplicidad, podemos usar puntos igualmente espaciados, con  $K_2 = K_{\min} + \Delta$ ,  $K_3 = K_{\min} + 2\Delta$  y así sucesivamente, en donde  $\Delta = (K_{\max} - K_{\min})/(p - 1)$ . Mientras más puntos usemos, es decir mientras  $p$  sea mayor y  $\Delta$  más pequeño, la aproximación será más precisa.

Luego, definimos una matriz  $M$  de la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} F(K_1; K_1) & F(K_1; K_2) & \dots & F(K_1; K_p) \\ F(K_2; K_1) & F(K_2; K_2) & \dots & F(K_2; K_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(K_p; K_1) & F(K_p; K_2) & \dots & F(K_p; K_p) \end{bmatrix}$$

en donde  $F(x; y) = u[f(x) + (1 - \epsilon)x - y]$ . La matriz  $M$  contiene la función de retorno evaluada para cada posible  $k \in K$  y  $k^0 \in K$ . Sin embargo, sabemos que no todos esos valores son posibles. La restricción  $k^0 \geq [0; f(k) + (1 - \epsilon)k]$  nos permite eliminar algunas celdas de la matriz que son inalcanzables para el planificador social, imponiéndole un valor cero<sup>8</sup>. Hacemos entonces:

$$M_{ij} = F(K_i; K_j) = 0 \quad \text{si} \quad K_j > f(K_i) + (1 - \epsilon)K_i$$

Una vez construida la matriz  $M$ , el resto del procedimiento es una simple iteración. Empezamos con cualquier vector columna  $V^0 \in \mathbb{R}^p$  (por ejemplo,  $V^0 = 0$ ) e iniciamos el siguiente algoritmo con  $s = 0$ :

1. Dado el vector  $V^s = (V_1^s, V_2^s, \dots, V_p^s)$  y la matriz  $M$ , calcular  $V^{s+1}$  de la siguiente manera:

$$V^{s+1} = \max_i \begin{bmatrix} M_{11} + V_1^s & M_{12} + V_2^s & \dots & M_{1p} + V_p^s \\ M_{21} + V_1^s & M_{22} + V_2^s & \dots & M_{2p} + V_p^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{p1} + V_1^s & M_{p2} + V_2^s & \dots & M_{pp} + V_p^s \end{bmatrix}$$

<sup>8</sup>O un valor negativo (como por ejemplo  $-1000$ ). El punto es impedir que el programa escoja esa celda al calcular la maximización.

donde el máximo es calculado por ...la, es decir:

$$V^{s+1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & n & & & & & & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{max} \\ \text{max} \\ \vdots \\ \text{max} \end{matrix} & \begin{matrix} M_{11} + ^{-}V_1^s; M_{12} + ^{-}V_2^s; \dots; M_{1p} + ^{-}V_p^s \\ M_{21} + ^{-}V_1^s; M_{22} + ^{-}V_2^s; \dots; M_{2p} + ^{-}V_p^s \\ \vdots \\ M_{p1} + ^{-}V_1^s; M_{p2} + ^{-}V_2^s; \dots; M_{pp} + ^{-}V_p^s \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{matrix}$$

2. Evaluar  $kV^{s+1}$  y  $V^s k$ . Si la norma es mayor que el criterio de tolerancia permitido, regresar al paso 1 con  $s = s + 1$ . En caso contrario, el procedimiento termina con la solución  $V = V^{s+1}$ .

Una vez obtenida la aproximación a la función de valor  $V$  (evaluada en cada uno de los  $p$  puntos de la malla), la correspondiente regla de decisión óptima  $G$  se obtiene calculando:

$$G = \arg \max \begin{matrix} \begin{matrix} 2 & & & & 3 \\ \text{max} \\ \text{max} \\ \vdots \\ \text{max} \end{matrix} & \begin{matrix} M_{11} + ^{-}V_1 & M_{12} + ^{-}V_2 & \dots & M_{1p} + ^{-}V_p \\ M_{21} + ^{-}V_1 & M_{22} + ^{-}V_2 & \dots & M_{2p} + ^{-}V_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{p1} + ^{-}V_1 & M_{p2} + ^{-}V_2 & \dots & M_{pp} + ^{-}V_p \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{matrix}$$

Es decir,  $G$  es un vector columna de  $n$  componentes, en donde  $G_i$  indica el número de la columna que maximiza la ...la  $i$ .

Podemos entonces reconstruir la secuencia óptima de capital, partiendo de  $k_0 = K_i$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k_1 &= K_j & \text{con } j &= G_i \\ k_2 &= K_l & \text{con } l &= G_j \\ & \vdots & & \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

### 2.2.2. Resolviendo el Equilibrio Competitivo

El método de iteración de la función de valor es particularmente apropiado para resolver el problema del planificador social. Sin embargo, su utilidad es menor al momento de resolver directamente el Equilibrio Competitivo. La razón no es que existan dos variables de estado, el capital individual y el agregado, pues eso sería

una simple extensión del método anterior. El principal problema es que la ley de movimiento del capital agregado (la función  $j$  en la ecuación de Bellman (2.1)) debe ser conocida al momento de realizar la optimización. Sin embargo, este es un objeto que solo conocemos luego de resolver el equilibrio.

Una forma de evitar este problema guarda cierta analogía con el método de doble iteración que vimos en la sesión anterior. Presentaremos solo la idea general, pues su utilización es limitada en la práctica. Suponemos que la ley de movimiento tiene cierta forma funcional, por ejemplo un polinomio de grado  $n$ :

$$K^0 = j(K) = a_1 + a_2 K^2 + \dots + a_n K^n$$

y proponemos un vector inicial de parámetros  $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ .

Dada esa ley de movimiento, la ecuación (2.1) puede resolverse iterando la función de valor. Obtenemos entonces la regla de decisión óptima y, dado  $k_0$ , calculamos la secuencia óptima resultante  $k_0; k_1; \dots; k_T$ . Con esos datos, corremos la regresión:

$$k_{t+1} = a_1 + a_2 k_t^2 + \dots + a_n k_t^n$$

y estimamos un nuevo juego de parámetros  $(\hat{a}_1; \hat{a}_2; \dots; \hat{a}_n)$ . Si estos están razonablemente cercanos a los que propusimos, termina el procedimiento. En caso contrario, volvemos a resolver la ecuación de Bellman usando  $(\hat{a}_1; \hat{a}_2; \dots; \hat{a}_n)$  como los nuevos parámetros de la ley de movimiento.

Evidentemente, este método de doble iteración será más preciso conforme mayor sea el grado  $n$  del polinomio que se use para aproximar la ley de movimiento del capital agregado. Pero aún con un  $n$  grande, nada garantiza la convergencia del algoritmo.

### 2.3. El Modelo Estocástico

Consideremos ahora un modelo un poco distinto, en el cual la productividad de la forma representativa está sujeta a un shock tecnológico  $\mu$ . Es decir, en cada período  $t$ , tenemos:

$$Y_t = \mu_t f(K_t)$$

en donde  $\mu_t$  es una variable aleatoria que sigue un determinado proceso estocástico. Las decisiones se toman en cada período antes de que el shock correspondiente sea observado.

Para poder aplicar el método de programación dinámica, suponemos que los shocks toman un número finito  $q$  de valores y siguen un proceso de Markov de primer orden. Es decir,  $\mu \in \{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^q\}$  y  $\text{Prob } \mu_{t+1} = \mu^j | \mu_t = \mu^i = \frac{1}{2} \mu_{ij}$ . Evidentemente, debe cumplirse que  $\sum_{j=1}^q \frac{1}{2} \mu_{ij} = 1$ . La matriz  $\frac{1}{2}$  de orden  $q \times q$  con todas las probabilidades  $\frac{1}{2} \mu_{ij}$  se conoce como la matriz de transición.

Un Equilibrio General Competitivo, Recursivo y Estocástico para esta economía es un conjunto de funciones (o planes contingentes)  $v(k; K; \mu)$ ,  $c(k; K; \mu)$ ,  $i(k; K; \mu)$ ,  $k^0(k; K; \mu)$ , precios  $w(K; \mu)$  y  $r(K; \mu)$  y ley de movimiento  $j(K; \mu)$  tales que:

i) Dadas las funciones  $w$ ,  $r$  y  $j$ , la función de valor  $v(k; K; \mu)$  resuelve la ecuación de Bellman:

$$v(k; K; \mu) = \max_{c; i; k^0} \{ u(c) + \beta E_{\mu} v(k^0; K^0; \mu^0) \} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.: } c + i &= w(K; \mu) + r(K; \mu)k \\ k^0 &= (1 - \delta)k + i \\ K^0 &= j(K; \mu) \end{aligned}$$

y las funciones  $c(k; K)$ ,  $i(k; K)$  y  $k^0(k; K)$  son reglas de decisión óptimas para este problema.

ii) Para todo  $K$  y  $\mu$ , los precios satisfacen las condiciones marginales:

$$r(K; \mu) = \mu f^0(K) \quad (2.13)$$

$$w(K; \mu) = \mu f(K) - \mu f^0(K)K \quad (2.14)$$

iii) Para todo  $K$  y  $\mu$ , hay igualdad entre oferta y demanda:

$$\mu f(K) = c(K; K; \mu) + i(K; K; \mu) \quad (2.15)$$

iv) Para todo  $K$  y  $\mu$ , ley de movimiento agregada y comportamiento individual son consistentes:

$$j(K; \mu) = k^0(K; K; \mu) \quad (2.16)$$

Nótese que, dada la forma en que hemos definido el proceso estocástico para los shocks tecnológicos, podemos expresar el valor esperado en (2.12) como:

$$E_{\mu^j} v(k^0; K^0; \mu^0) = \sum_{j=1}^J \pi_{ij} v(k^0; K^0; \mu^j) \quad (2.17)$$

Nótese también que las reglas de decisión óptimas son planes contingentes. Para obtener las trayectorias correspondientes es necesario simular una historia completa de realización de los shocks tecnológicos.

Similarmente, definimos un Optimo de Pareto Recursivo y Estocástico como un conjunto de funciones  $v(k; \mu)$ ,  $c(k; \mu)$ ,  $i(k; \mu)$ ,  $k^0(k; \mu)$  que resuelven la ecuación de Bellman del planificador social:

$$v(k; \mu) = \max_{c; i; k^0} \{ u(c) + \beta E_{\mu} v(k^0; \mu^0) \} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t: } c + i &= \mu f(k) \\ k^0 &= (1 - \delta)k + i \end{aligned}$$

y nuevamente, en aquellos casos en que se cumplan los supuestos de los Teoremas del Bienestar, resolveremos este problema como una manera indirecta de calcular el Equilibrio Competitivo.

### 2.3.1. Iteración de la Función de Valor

La ecuación de Bellman (2.18) puede resolverse numéricamente usando el método de iteración de la función de valor. Dada una malla  $(K_1, K_2, \dots, K_p)$  para el stock de capital y la malla  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$  para los shocks tecnológicos, definimos la matriz  $M$  de orden  $p \times q$  de la siguiente manera:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & & & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} F(K_1; K_1; \mu_1) & F(K_1; K_2; \mu_1) & \dots & F(K_1; K_p; \mu_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(K_p; K_1; \mu_1) & F(K_p; K_2; \mu_1) & \dots & F(K_p; K_p; \mu_1) \\ F(K_1; K_1; \mu_2) & F(K_1; K_2; \mu_2) & \dots & F(K_1; K_p; \mu_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(K_p; K_1; \mu_2) & F(K_p; K_2; \mu_2) & \dots & F(K_p; K_p; \mu_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(K_1; K_1; \mu_q) & F(K_1; K_2; \mu_q) & \dots & F(K_1; K_p; \mu_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(K_p; K_1; \mu_q) & F(K_p; K_2; \mu_q) & \dots & F(K_p; K_p; \mu_q) \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}$$



en donde  $F(x; y; \mu) = u[\mu f(x) + (1 - \mu)f(y)]$ . Nuevamente, imponemos las restricciones tecnológicas en la matriz  $M$  haciendo::

$$M_{p(l_i - 1) + i; j} - F(K_i; K_j; \mu_l) = 0 \quad \text{si} \quad K_j > \mu_l f(K_i) + (1 - \mu_l) K_i$$

Una vez construída  $M$ , escojemos cualquier vector columna  $V^0 \in \mathbb{R}^{pq}$  (por ejemplo,  $V^0 = 0$ ) e iniciamos el siguiente algoritmo con  $s = 0$ :

1. Dado el vector  $V^s = [V_1^s; V_2^s; \dots; V_{pq}^s]$ , calcular una matriz  $W^s$  de  $q \in p$  de acuerdo a:

$$W^s = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \begin{matrix} \sum_{j=1}^q \frac{1}{4} V_{j(p_i - 1) + 1}^s & \sum_{j=1}^q \frac{1}{4} V_{j(p_i - 1) + 2}^s & \dots & \sum_{j=1}^q \frac{1}{4} V_{j(p_i - 1) + p}^s \\ \sum_{j=1}^q \frac{1}{4} V_{j(p_i - 1) + 1}^s & \sum_{j=1}^q \frac{1}{4} V_{j(p_i - 1) + 2}^s & \dots & \sum_{j=1}^q \frac{1}{4} V_{j(p_i - 1) + p}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^q \frac{1}{4} V_{j(p_i - 1) + 1}^s & \sum_{j=1}^q \frac{1}{4} V_{j(p_i - 1) + 2}^s & \dots & \sum_{j=1}^q \frac{1}{4} V_{j(p_i - 1) + p}^s \end{matrix} \end{matrix}$$

2. Dados el vector  $W^s$  y la matriz  $M$ , calcular la matriz  $M^s$  de orden  $p \times q$  de la siguiente manera:

$$M^s = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & q \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \begin{matrix} M_{11} + \frac{1}{4} W_{11}^s & M_{12} + \frac{1}{4} W_{12}^s & \dots & M_{1p} + \frac{1}{4} W_{1p}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{p1} + \frac{1}{4} W_{11}^s & M_{p2} + \frac{1}{4} W_{12}^s & \dots & M_{pp} + \frac{1}{4} W_{1p}^s \\ M_{p+1;1} + \frac{1}{4} W_{21}^s & M_{p+1;2} + \frac{1}{4} W_{22}^s & \dots & M_{p+1;p} + \frac{1}{4} W_{2p}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2p;1} + \frac{1}{4} W_{21}^s & M_{2p;2} + \frac{1}{4} W_{22}^s & \dots & M_{2p;p} + \frac{1}{4} W_{2p}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{(q_i - 1)p + 1;1} + \frac{1}{4} W_{q1}^s & M_{(q_i - 1)p + 1;2} + \frac{1}{4} W_{q2}^s & \dots & M_{(q_i - 1)p + 1;p} + \frac{1}{4} W_{qp}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{qp;1} + \frac{1}{4} W_{q1}^s & M_{qp;2} + \frac{1}{4} W_{q2}^s & \dots & M_{qp;p} + \frac{1}{4} W_{qp}^s \end{matrix} \end{matrix}$$

3. Dada la matriz  $M^s$ , calcular el vector  $V^{s+1}$  como:

$$V^{s+1} = \max M^s$$

donde el máximo es calculado por ...la.

4. Evaluar  $\|V^{s+1} - V^s\|$ . Si la norma es mayor que el criterio de tolerancia permitido, regresar al paso 1 con  $s = s + 1$ . En caso contrario, el procedimiento termina con la solución  $V = V^{s+1}$ .

La regla de decisión óptima se calcula como antes:

$$G = \arg \max M^s$$

en donde  $M^s$  es la matriz obtenida en el segundo paso de la última iteración.

Con el método anterior, obtenemos la función de valor  $V$  y la regla de decisión óptima  $G$  evaluadas para cada stock de capital y cada shock tecnológico. Estos vectores están ordenados de la siguiente manera:

en donde  $I = g(K_i; \mu_j)$  nos indica que, dado el stock de capital y la realización del shock tecnológico, el planificador social escogerá un stock de capital para el siguiente período igual a  $K_i$ .

Para obtener una secuencia óptima de capital  $k_0; k_1; \dots; k_T$  debemos entonces simular primero una historia de realización de shocks tecnológicos  $\mu_0; \mu_1; \dots; \mu_T$  usando por supuesto la información contenida en la matriz de transición  $\Pi$ . Cualquier lenguaje de programación elige números aleatorios de acuerdo a una distribución específica. Por ejemplo, podemos pedir que elija  $\mu_0$  asignando la misma probabilidad  $1=q$  a cada uno de los posibles valores en la malla  $\mu^1; \mu^2; \dots; \mu^q$ . A continuación, pedimos que simule recursivamente una secuencia  $\mu_1; \dots; \mu_T$  de manera tal que, dado  $\mu_t = \mu^i$ , elija  $\mu_{t+1}$  entre los valores  $\mu^1; \mu^2; \dots; \mu^q$  con una distribución de probabilidad  $(\frac{1}{4}i_1; \frac{1}{4}i_2; \dots; \frac{1}{4}i_q)$ .

23

### 2.3.3. Limitaciones

El método de iteración de la función de valor tiene la ventaja de ser bastante preciso cuando la malla de valores para las variables de estado es suficientemente fina. Además, permite incorporar incertidumbre de una manera natural. Sin embargo, este método tiene a su vez ciertas limitaciones. Primero, su aplicabilidad es mayor para economías en las que los Teoremas del Bienestar se cumplen y podemos entonces resolver el problema del planificador social. Ya hemos visto las dificultades que se presentan al tratar de resolver directamente el Equilibrio Competitivo.

En segundo lugar, al aumentar el número de variables de estado y/o el número de puntos en la malla, la dimensión del problema (de la matriz  $M$ ) crece exponencialmente volviendo este método muy lento y costoso en términos computacionales.

Por último, los métodos basados en la programación dinámica solo permiten introducir shocks estocásticos de una determinada estructura, básicamente procesos de Markov de primer orden con número finito de estados. Otros procesos estocásticos más generales requieren métodos distintos, como el que analizaremos en la próxima sesión.

### 3. Tercera Sesión

En esta sesión revisaremos el método de aproximación lineal-cuadrática en torno al estado estacionario. Durante muchos años, este método fue considerado estándar para resolver modelos macroeconómicos dinámicos, especialmente el modelo de Ciclos Económicos Reales de Kydland y Prescott (1982). Empezaremos revisando las técnicas para analizar y resolver problemas de maximización intertemporal en los cuales la función objetivo toma una forma cuadrática y las restricciones son lineales. Una buena referencia para esta sección es el libro de Sargent (1987). En la segunda parte, veremos como transformar el problema del planificador social y el Equilibrio Competitivo en problemas lineal-cuadráticos, a fin de resolverlos usando las técnicas anteriores.

#### 3.1. El Modelo Lineal-Cuadrático

Consideremos el siguiente problema de optimización dinámica:

$$\begin{aligned} \max_{\{y_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t & x_t^T R x_t + 2y_t^T W x_t + y_t^T Q y_t \\ \text{s.t.: } x_{t+1} &= A x_t + B y_t + \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} &\sim (0; S) \end{aligned} \quad (3.1)$$

en donde  $x_t$  es un vector columna de  $p$  variables de estado (incluyendo la constante),  $y_t$  es un vector columna de  $q$  variables de control y  $\varepsilon_t$  es un vector de  $p$  variables aleatorias (ruidos blancos) distribuidas conjuntamente con media cero y matriz de varianzas-covarianzas  $S$ . Las matrices de coeficientes  $R_{p \times p}$ ,  $W_{q \times p}$ ,  $Q_{q \times q}$ ,  $A_{p \times p}$ ,  $B_{p \times q}$  y  $S_{p \times p}$  son datos del problema, así como el vector inicial de variables de estado  $x_0$ . Finalmente, asumimos que tanto  $R$  como  $Q$  son matrices simétricas,  $R$  negativa semidefinida y  $Q$  negativa definida.

El problema (3.1) pertenece a la clase de modelos lineal-cuadráticos, en los cuales se maximiza la suma descontada de una función objetivo cuadrática sujeto a una secuencia de restricciones lineales. En esta sección estudiaremos las propiedades de este modelo y un método numérico para resolverlo.

##### 3.1.1. Ecuación de Bellman

Podemos reformular el problema (3.1) de manera recursiva como un problema de programación dinámica:

$$v(x) = \max_y \{ x^T R x + 2y^T W x + y^T Q y + \gamma E v(x^0) \} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t: } x^0 &= A x + B y + u^0 \\ u^0 &\in (0; S) \end{aligned}$$

en donde el valor esperado dentro de la maximización se calcula en base a toda la información contenida en el vector de variables de estado  $x$ .

Para resolver la ecuación de Bellman (3.2), proponemos que la función de valor tiene la siguiente forma:

$$v(x) = x^T P x + d \quad (3.3)$$

en donde  $P$  es una matriz simétrica, negativa semidefinida, de orden  $p \in p$  y:

$$d = -\gamma (1 - \gamma)^{-1} \text{traza} (P S) \quad (3.4)$$

Más adelante verificaremos que la solución toma efectivamente esa forma.

Reemplazando esta solución propuesta en (3.2), tenemos:

$$v(x) = \max_y \{ x^T R x + 2y^T W x + y^T Q y + \gamma E \{ (x^0)^T P x^0 + d \} \}$$

y, usando la ley de movimiento del vector de variables de estado:

$$\begin{aligned} v(x) = \max_y \{ &x^T R x + 2y^T W x + y^T Q y \\ &+ \gamma E \{ (A x + B y + u^0)^T P (A x + B y + u^0) + d \} \} \end{aligned}$$

que, simplificando, nos da:

$$\begin{aligned} v(x) = \max_y \{ &x^T R x + 2y^T W x + y^T Q y + 2\gamma y^T B^T P A x \\ &+ \gamma y^T B^T P B y + \gamma x^T A^T P A x + \gamma E \{ (u^0)^T P u^0 \} + \gamma d \} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ahora bien, nótese que  $E \{ (u^0)^T P u^0 \} = \text{traza} E \{ (u^0)^T P u^0 \} = \text{traza} P E \{ (u^0)^T u^0 \} = \text{traza} (P S)$ . Reemplazando en (3.5) y usando la definición de  $d$  en (3.4), obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} v(x) = \max_y \{ &x^T R x + 2y^T W x + y^T Q y + 2\gamma y^T B^T P A x \\ &+ \gamma y^T B^T P B y + \gamma x^T A^T P A x + d \} \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.1.2. Cálculo de la Regla de Decisión Óptima

El siguiente paso consiste en resolver la maximización en (3.6), usando la condición de primer orden:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial y} = 2Wx + 2Qy + 2^{-}B^T P A x + 2^{-}B^T P B y = 0$$

que, despejando, nos da la regla de decisión óptima  $y = Gx$ , con la matriz:

$$G = [Q + B^T P B]^{-1} [W + B^T P A] \quad (3.7)$$

Nótese dos propiedades de esta regla de decisión óptima. En primer lugar, es una función lineal de las variables de estado. En segundo lugar,  $G$  es independiente de la estructura estocástica del problema, en particular de la matriz de varianzas-covarianzas  $S^0$ . Ambas propiedades son específicas al modelo lineal-cuadrático.

### 3.1.3. Iteración de la Matriz de Ricatti

Nos queda verificar que la solución toma efectivamente la forma propuesta en (3.3), encontrando una matriz  $P$  que satisfaga:

$$\begin{aligned} x^T P x + d = & x^T R x + 2(Gx)^T W x + (Gx)^T Q (Gx) \\ & + 2^{-}(Gx)^T B^T P A x + 2^{-}(Gx)^T B^T P B (Gx) + 2^{-}x^T A^T P A x + d \end{aligned}$$

en donde el lado derecho de la ecuación se obtiene reemplazando la regla de decisión óptima en (3.6). Eliminando  $d$  de ambos lados y dividiendo la ecuación por  $x^T x$ , nos queda:

$$P = R + 2G^T W + G^T Q G + 2^{-}G^T B^T P A + 2^{-}G^T B^T P B G + 2^{-}A^T P A$$

y, reemplazando la definición de  $G$  (3.7) y simplificando, obtenemos finalmente:

$$P = R + 2^{-}A^T P A [Q + B^T P B]^{-1} W^T + 2^{-}A^T P B [Q + B^T P B]^{-1} W + 2^{-}B^T P B [Q + B^T P B]^{-1} W + 2^{-}B^T P A \quad (3.8)$$

una expresión conocida como la ecuación de Ricatti.

---

<sup>9</sup>A esta segunda propiedad se le conoce como equivalencia de certidumbre. Ella nos permite hallar la regla de decisión óptima resolviendo el problema determinístico y usar la estructura estocástica del modelo únicamente para la simulación de las trayectorias óptimas.

Se puede demostrar que la ecuación (3.8) tiene una única solución  $P$  simétrica y negativa semidefinida. Además, podemos encontrar esa solución mediante el siguiente proceso iterativo. Partiendo de cualquier matriz  $P_0$  simétrica y negativa semidefinida (por ejemplo,  $P_0 = 0$ ), calculamos recursivamente:

$$P_{n+1} = R + A^T P_n A - \frac{A^T P_n B (B^T P_n B + I)^{-1} B^T P_n A}{B^T P_n B + I} W + \frac{A^T P_n B (B^T P_n B + I)^{-1} B^T P_n A}{B^T P_n B + I} W + \frac{A^T P_n B (B^T P_n B + I)^{-1} B^T P_n A}{B^T P_n B + I} W + \frac{A^T P_n B (B^T P_n B + I)^{-1} B^T P_n A}{B^T P_n B + I} W$$

hasta obtener convergencia. Se demuestra que, conforme  $n$  tiende a infinito, la secuencia  $P_n$  converge a la verdadera solución  $P$ .

### 3.1.4. Simulación de Trayectorias Optimas

Una vez calculada la matriz  $P$  que satisface la ecuación de Ricatti, podemos calcular la función de valor (3.3) y la regla de decisión óptima (3.7). Volviendo a la ley de movimiento de las variables de estado:

$$x_{t+1} = Ax_t + By_t + \epsilon_{t+1}$$

y reemplazando la regla de decisión óptima  $G$ :

$$x_{t+1} = (A + BG) x_t + \epsilon_{t+1} \quad (3.9)$$

obtenemos un sistema lineal de ecuaciones en diferencia para  $x_t$ , sujeta a shocks estocásticos.

Este sistema nos permite simular las trayectorias óptimas de las variables de estado, dados  $x_0$  y una determinada secuencia de realizaciones de los shocks estocásticos  $\epsilon_t$ . También nos permite analizar la estabilidad del sistema, es decir si luego de un shock que aleje al vector  $x_t$  del estado estacionario éste vuelve a converger al mismo en el largo plazo. Para que el modelo sea estable, tiene que cumplirse que los valores propios de la matriz  $(A + BG)$  sean todos menores que uno en valor absoluto.

### 3.1.5. Computación Eficiente

La eficiencia del método linear-cuadrático puede ser aumentada considerablemente mediante unas simples transformaciones. La idea es simplificar la versión determinística del problema (3.2) eliminando el factor de descuento y los productos cruzados, para obtener un problema de la forma:

$$v(x) = \max_y \quad x^T R x + y^T Q y + v(x^0) \quad (3.10)$$

$$s.t: \quad x^0 = A x + B y$$

Esa simplificación puede obtenerse mediante las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} x_t &= -\frac{1}{2} x_t \\ y_t &= -\frac{1}{2} y_t + Q^{-1} W x_t \\ R &= R - W^T Q^{-1} W \\ Q &= Q \\ A &= A - B Q^{-1} W \\ B &= B \end{aligned}$$

Para resolver el problema transformado (3.10) seguimos los mismos pasos que en el caso del problema original. En primer lugar, proponemos una solución  $v(x) = x^T P x$ , en donde  $P$  es una matriz simétrica negativa semidefinida. En segundo lugar, derivamos la regla de decisión óptima  $y = G x$ , obteniendo:

$$G = -[Q + B^T P B]^{-1} B^T P A \quad (3.11)$$

Finalmente, calculamos la matriz  $P$  resolviendo iterativamente la ecuación de Ricatti:

$$P = R + A^T P A - A^T P B [Q + B^T P B]^{-1} B^T P A \quad (3.12)$$

que es computacionalmente más sencilla que su similar (3.8).

Nótese que, una vez calculada la regla de decisión óptima  $G$ , podemos recuperar la regla de decisión para el problema original:

$$y = -G [Q^{-1} W] x$$

e, introduciendo los shocks estocásticos, simular las trayectorias óptimas de las variables originales.



### 3.2. Aproximación Lineal-Cuadrática en Torno al Estado Estacionario

En general, los modelos con los que trabajamos no tienen una estructura lineal-cuadrática equivalente al problema (3.2). No podemos, por lo tanto, aplicar el método de solución presentado en la sección anterior, al menos directamente. La estrategia que seguiremos es construir una aproximación lineal-cuadrática a nuestro modelo en torno al estado estacionario (determinístico), utilizando para ello una expansión de Taylor de segundo orden. Esta técnica, usada inicialmente por Kydland y Prescott (1982), es fácilmente aplicable para resolver el problema del planificador social. Como veremos al final, también podemos usar una versión de este método para resolver el Equilibrio Competitivo en una economía para la cual no se cumplen los supuestos de los Teoremas del Bienestar.

#### 3.2.1. Resolviendo el Problema del Planificador Social

Empecemos con el problema del planificador social con shocks tecnológicos en su forma recursiva. Reemplazando las restricciones no-lineales dentro de la función objetivo, tenemos:

$$v(k; \mu) = \max_i \quad f_u[\mu f(k; i)] + \beta E_\mu v(k^0; \mu^0)g \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t: } k^0 &= (1 - \delta)k + i \\ \mu^0 &= (1 - \frac{1}{2})\mu + \frac{1}{2}\mu^0 + \epsilon_\mu^0 \\ \epsilon_\mu^0 &\gg 0; \frac{1}{4}\mu^2 \end{aligned}$$

Nótese que hemos cambiado la especificación estocástica de los shocks tecnológicos. En la sesión anterior trabajamos con un proceso de Markov de primer orden con número finito de estados. Hemos generalizado dicha representación a un proceso autoregresivo de primer orden con media uno. Una de las ventajas del método lineal-cuadrático es que permite trabajar con este tipo de procesos.

Tenemos entonces identificadas dos variables de estado  $k, \mu$ , así como la variable de control  $i$ . El siguiente paso es calcular los valores de estado estacionario determinístico (eliminando el ruido estocástico) de estas variables:

$$\begin{aligned} \mu^s &= 1 \\ k^s &= f_k^{-1} \left( \frac{1}{1 - \delta} \right) \end{aligned}$$

$$i^a = \pm f_k^{i-1} \frac{1}{\pm i} (1 \pm i)$$

y aproximar la función de retorno  $U(k; \mu; i) \approx u[\mu f(k) \pm i]$  mediante una expansión de Taylor de segundo orden en torno a dichos valores:

$$\begin{aligned} U(k; \mu; i) \approx & U^{(2)} + U_k^{(2)}(k - k^a) + U_\mu^{(2)}(\mu - \mu^a) + U_i^{(2)}(i - i^a) \\ & + \frac{1}{2} U_{kk}^{(2)}(k - k^a)^2 + \frac{1}{2} U_{\mu\mu}^{(2)}(\mu - \mu^a)^2 + \frac{1}{2} U_{ii}^{(2)}(i - i^a)^2 \\ & + U_{k\mu}^{(2)}(k - k^a)(\mu - \mu^a) + U_{ki}^{(2)}(k - k^a)(i - i^a) \\ & + U_{\mu i}^{(2)}(\mu - \mu^a)(i - i^a) \end{aligned} \quad (3.14)$$

en donde todas las funciones con argumento  $(^2)$  están evaluadas en el vector de estado estacionario  $(k^a; \mu^a; i^a)$ .

La aproximación de Taylor (3.14) nos da una función de retorno cuadrática. Reemplazandola en el problema del planificador social (3.13), tenemos ahora sí un objeto equivalente a (3.2), con:

$$\begin{aligned} x = \begin{bmatrix} k - k^a \\ \mu - \mu^a \end{bmatrix} \quad y = [i - i^a] \quad u = \begin{bmatrix} k - k^a \\ \mu - \mu^a \\ i - i^a \end{bmatrix} \\ R = \begin{bmatrix} 2U^{(2)} & U_k^{(2)} & U_\mu^{(2)} \\ U_k^{(2)} & U_{kk}^{(2)} & U_{k\mu}^{(2)} \\ U_\mu^{(2)} & U_{k\mu}^{(2)} & U_{\mu\mu}^{(2)} \end{bmatrix} \quad W^T = \begin{bmatrix} U_i^{(2)} \\ U_{ki}^{(2)} \\ U_{\mu i}^{(2)} \end{bmatrix} \quad Q = [U_{ii}^{(2)}] \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}\mu^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y en donde  $R$  es simétrica y negativa semidefinida y  $Q$  es simétrica y negativa definida<sup>10</sup>.

<sup>10</sup>Estas propiedades de las matrices  $R$  y  $Q$  pueden demostrarse usando la concavidad de las funciones de utilidad y de producción.

Podemos entonces resolver este problema mediante las técnicas analizadas en la sección anterior, obtener la regla de decisión óptima (lineal) y hacer las simulaciones estocásticas. Nótese, sin embargo, que todas las variables están expresadas en términos de desviaciones con respecto al estado estacionario. Los resultados deben transformarse adecuadamente para recuperar las variables en términos absolutos.

### 3.2.2. Resolviendo el Equilibrio Competitivo

Trabajar directamente con el Equilibrio Competitivo implica resolver el problema:

$$v(k; K; \mu) = \max_{c; i} \quad f_u(c) + \beta E_{\mu} v(k^0; K^0; \mu^0) g \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t:} \quad c + i &= w(K) + r(K)k \\ k^0 &= (1 - \delta)k + i \\ r(K) &= f_k(K) \\ w(K) &= f(K) - f_k(K)K \\ K^0 &= \bar{K}(K) \\ \mu^0 &= \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\mu + \mu''^0 \\ \mu''^0 &\gg 0; \frac{3}{4}\mu^2 \end{aligned}$$

en donde la ley de movimiento del capital agregado  $\bar{K}$  no es conocida. Sin embargo, sabemos que en equilibrio la igualdad  $K = k$  se cumple, aunque el agente representativo no toma en cuenta esa condición de equilibrio al resolver su maximización.

Reemplazando la restricción presupuestaria y las definiciones de precios dentro de la función de utilidad, obtenemos la ecuación de Bellman:

$$v(k; K; \mu) = \max_i \quad f_U(k; K; \mu; i) + \beta E_{\mu} v(k^0; K^0; \mu^0) g \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t:} \quad k^0 &= (1 - \delta)k + i \\ \mu^0 &= \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\mu + \mu''^0 \\ \mu''^0 &\gg 0; \frac{3}{4}\mu^2 \end{aligned}$$

en donde  $U(k; \mu; i; K) = u[\mu f(K) + \mu f_k(K)K + \mu f_k(K)k + i]$ , junto con la condición de equilibrio  $K = k$ .

Nuevamente aproximamos la función  $U$  mediante una expansión de Taylor de segundo orden en torno al vector de estado estacionario  $(k^a; \mu^a; i^a; K^a)$ , obteniendo un problema lineal-cuadrático del tipo:

$$v(x) = \max_y \left\{ x^T R x + 2y^T W x + y^T Q y + \bar{E} v(x^0) \right\} \quad (3.17)$$

$$\text{s.t: } \begin{cases} x_1^0 = A x_1 + B y + C x_2 + x^0 \\ x^0 \gg (0; S) \end{cases}$$

más la condición de equilibrio:

$$x_2 = D x_1 + H y$$

en donde:

$$x_1 = \begin{bmatrix} k \\ \mu \\ i \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} K \\ K^a \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} i \\ i^a \end{bmatrix}, \quad x^0 = \begin{bmatrix} k^a \\ \mu^a \\ i^a \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2U_k^{(2)} & U_k^{(2)} & U_\mu^{(2)} & U_K^{(2)} \\ U_k^{(2)} & U_{kk}^{(2)} & U_{k\mu}^{(2)} & U_{kK}^{(2)} \\ U_\mu^{(2)} & U_{k\mu}^{(2)} & U_{\mu\mu}^{(2)} & U_{\mu K}^{(2)} \\ U_K^{(2)} & U_{kK}^{(2)} & U_{\mu K}^{(2)} & U_{KK}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad W^T = \begin{bmatrix} U_i^{(2)} & U_{ki}^{(2)} & U_{\mu i}^{(2)} & U_{Ki}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$Q = [U_{ii}^{(2)}], \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = [0], \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}\mu^2 \end{bmatrix}$$

con  $R$  y  $Q$  simétricas,  $R$  negativa semidefinida y  $Q$  negativa definida.

Definamos finalmente las matrices auxiliares:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 2U^{(2)} & U_k^{(2)} & U_\mu^{(2)} \\ U_k^{(2)} & U_{kk}^{(2)} & U_{k\mu}^{(2)} \\ U_\mu^{(2)} & U_{k\mu}^{(2)} & U_{\mu\mu}^{(2)} \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} U_K^{(2)} \\ U_{K\mu}^{(2)} \\ U_{\mu K}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$W_1^T = \begin{bmatrix} U_i^{(2)} \\ U_{ki}^{(2)} \\ U_{\mu i}^{(2)} \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} U_{\mu i}^{(2)} \end{bmatrix}$$

que son simples particiones de las matrices  $R$  y  $W$ .

Para resolver el problema (3.17), vamos a utilizar la equivalencia de certidumbre y trabajar con el problema determinístico. Además, mediante las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} x_t &= \gamma^{-\frac{t}{2}} \tilde{x}_t \\ y_t &= \gamma^{-\frac{t}{2}} \tilde{y}_t + Q^i \gamma^{-1} W x_t \\ R &= R_i \gamma^{-1} W^T Q^i \gamma^{-1} W \\ Q &= Q_i \gamma^{-3} \\ A &= A_i \gamma^{-1} B Q^i \gamma^{-1} W_1 \\ B &= B_i \gamma^{-1} \\ C &= C_i \gamma^{-1} B Q^i \gamma^{-1} W_2 \\ D &= I + H Q^i \gamma^{-1} W_2 \gamma^{-1} D_i \gamma^{-1} H Q^i \gamma^{-1} W_1 \\ H &= I + H Q^i \gamma^{-1} W_2 \gamma^{-1} H \end{aligned}$$

simplificamos el problema eliminando el factor de descuento y los productos cruzados. Nos queda un problema de la forma:

$$v(x) = \max_y \left\{ x^T R x + y^T Q y + v(x^0) \right\} \quad (3.18)$$

$$s.t: \quad x_1^0 = A x_1 + B y + C x_2 \quad (3.19)$$

más la condición de equilibrio:

$$x_2 = D x_1 + H y \quad (3.20)$$

Las condiciones de primer orden para (3.18) incluyen:

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{y}} = 2\mathbf{Q}\mathbf{y} + \mathbf{B}^T \lambda = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1^0} = j_1 + 2R_1 x_1^0 + 2R_2 x_2^0 + \mathbf{A}^T \lambda = 0 \quad (3.22)$$

en donde  $\lambda$  es el vector de multiplicadores de Lagrange asociado a la restricción (3.19). Nótese que no podemos tomar la derivada con respecto a  $x_2$ , pues no conocemos la ley de movimiento de las variables agregadas. Sin embargo, sabemos que en equilibrio la condición (3.20) se cumple.

El siguiente paso consiste en proponer una solución para el multiplicador de Lagrange, que luego verificaremos. Proponemos la regla  $\lambda = 2Sx_1^0$ , en donde  $S$  es una matriz negativa semidefinida. Reemplazando en (3.21):

$$\mathbf{Q}\mathbf{y} + \mathbf{B}^T S x_1^0 = 0$$

y usando la restricción (3.19) junto con la condición de equilibrio (3.20):

$$\mathbf{Q}\mathbf{y} + \mathbf{B}^T S (\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{D}) x_1 + \mathbf{B}^T S \mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{H} \mathbf{y} = 0$$

obtenemos la regla de decisión óptima  $\mathbf{y} = \mathbf{G}x_1$ , con:

$$\mathbf{G} = j_1 \mathbf{Q} + \mathbf{B}^T S \mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{H}^{-1} j_1 \mathbf{B}^T S (\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{D}) \quad (3.23)$$

Para verificar esta solución y encontrar la matriz  $S$ , trabajamos con la ecuación (3.22). Reemplazando  $\lambda$  por  $2Sx_1^0$  y usando la condición de equilibrio (3.20), tenemos:

$$R_1 + R_2 \mathbf{D} j_1 S x_1^0 + R_2 \mathbf{H} y^0 + \mathbf{A}^T S x_1^0 = 0$$

lo que, rezagando un período y usando la restricción (3.19), nos da:

$$R_1 + R_2 \mathbf{D} j_1 S x_1 + R_2 \mathbf{H} y + \mathbf{A}^T S (\mathbf{A}x_1 + \mathbf{B}y + \mathbf{C}x_2) = 0$$

Usando la condición de equilibrio (3.20) junto con la regla de decisión óptima  $\mathbf{y} = \mathbf{G}x_1$ , nos queda:

$$j_1 R_1 + R_2 \mathbf{D} j_1 S + \mathbf{A}^T S (\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{D}) + R_2 \mathbf{H} + \mathbf{A}^T S \mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{H}^{-1} j_1 \mathbf{G} x_1 = 0$$

Finalmente, eliminando  $x_1$  a ambos lados, reemplazando la definición de  $G$  en (3.23) y reordenando términos, obtenemos:

$$S = R_1 + R_2 D + A^T S^3 A + C D$$

$$i^h R_2 H + A^T S^3 B + C H^i Q + B^T S^3 B + C H^{i-1} B^T S^3 A + C D$$

una versión de la ecuación de Ricatti (3.12) que puede resolverse iterativamente como antes<sup>11</sup>.

Una vez hallada la matriz  $S$  y calculada la regla de decisión óptima  $G$ , recuperamos la regla de decisión para el problema original:

$$y = I + Q^{i-1} W_2 H^{i-1} G_i Q^{i-1} (W_1 + W_2 D)^i x_1$$

y simulamos las trayectorias óptimas de las principales variables. Recuérdese nuevamente que estas variables están expresadas como desviaciones con respecto a su nivel de estado estacionario.

### 3.2.3. Limitaciones

El método de aproximación lineal-cuadrática ofrece un procedimiento bastante simple y rápido en términos computacionales, incluso cuando el número de variables se incrementa. Al no forzar la discretización del espacio para las variables de estado, las soluciones tienden a ser más precisas. Sin embargo, su principal limitación es que asume que las reglas de decisión óptima son lineales, lo que constituye una buena aproximación únicamente cuando el modelo se mantiene cerca del estado estacionario. Este método no será el adecuado, por lo tanto, para economías que empiezan con un capital inicial muy por debajo del nivel de estado estacionario, o para aquellas en las cuales los shocks estocásticos tienen una varianza muy alta.

---

<sup>11</sup>McGrattan (1994) desarrolla de manera similar un método para resolver el Equilibrio Competitivo mediante una aproximación lineal-cuadrática. Adicionalmente, presenta un método alternativo para resolver la ecuación de Ricatti que no requiere de iteraciones.

## References

- [1] Bergoeing, Raphael. "Notas en Experimentos Computacionales y Teoria de Equilibrio General Aplicada", Documento de Docencia D-6, Ilades-Georgetown University, 1998.
- [2] Cooley, Thomas y Edward Prescott. "Economic Growth and Business Cycles". En: Cooley, Thomas (ed.). *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton University Press, 1995.
- [3] Den Haan, Wouter y Albert Marcet. "Solving the Stochastic Growth Model by Parametrizing Expectations", *Journal of Business and Economic Statistics*, 1990.
- [4] Kydland, Finn y Edward Prescott. "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *Econometrica* 50, 1982.
- [5] McGrattan, Ellen. "A Note on Computing Competitive Equilibria in Linear Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1994.
- [6] McGrattan, Ellen. "Solving the Stochastic Growth Model with a Finite Element Method", Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1994.
- [7] McGrattan, Ellen. "Application of Weighted Residual Methods to Dynamic Economic Models", Sta $\pi$  Report 232, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1998.
- [8] Rios-Rull, Jose Victor. "Computation of Equilibria in Heterogeneous Agent Models", University of Pennsylvania, 1998.
- [9] Sargent, Thomas. *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press, 1987.
- [10] Stokey, Nancy y Robert Lucas. *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, 1989.
- [11] Urrutia, Carlos. "Notas sobre Crecimiento y Ciclos Economicos", Documento de Docencia D-5, Ilades-Georgetown University, 1996.



## A. Ejercicios de Repaso

### A.1. Primera Sesión

1) Usar el método de Newton-Raphson para aproximar con un nivel de tolerancia de  $10^{-5}$  las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$x = (2 - e^x + x^2) = 3$$

$$3x^2 - e^x = 0$$

$$e^x + 2^{-x} + 2\cos(x) - 6 = 0$$

Repetir el ejercicio usando el método de secante.

2) La ecuación  $(4x - 7) = (x - 2) = 0$  tiene una solución  $x = 1.75$ . Usar el método de Newton-Raphson para la ecuación anterior con los siguientes valores iniciales:

$$x_0 = 1.625 \quad x_0 = 1.875 \quad x_0 = 1.45 \quad x_0 = 3$$

y explicar gráficamente los resultados obtenidos.

3) Encontrar y graficar las trayectorias óptimas para el capital, consumo, producto, salario real y tasa de interés en el Modelo de Crecimiento Neoclásico Simple, con las siguientes formas funcionales:

$$u(c) = \log(c) \quad f(k) = Ak^\alpha$$

los siguientes valores para los parámetros:

$$\beta = 0.99 \quad A = 10 \quad \alpha = 0.35 \quad \delta = 0.06$$

y un stock de capital inicial  $k_0$  igual a la mitad del capital de estado estacionario  $k^*$ , utilizando el método de iteración de Gauss-Seidel con 100 períodos ¿Cómo se modifican dichas trayectorias cuando cambiamos el valor de  $\beta$  a 0.98?

4) Repetir los pasos en la parte (3) para una economía en la cual el gobierno impone una tasa impositiva al ingreso de 20%, cuya recaudación es devuelta a los agentes como una transferencia lump-sum. ¿Cómo se modifican dichas trayectorias cuando la tasa impositiva asumenta a 25%? Evaluar el efecto sobre el bienestar del agente representativo de dicha medida.

## A.2. Segunda Sesión

1) Encontrar y graficar las trayectorias óptimas para el capital, consumo, producto, salario real y tasa de interés en el Modelo de Crecimiento Neoclásico Simple, con las siguientes formas funcionales:

$$u(c) = \log(c) \quad f(k) = Ak^\alpha$$

los siguientes valores para los parámetros:

$$\beta = 0.99 \quad A = 10 \quad \alpha = 0.35 \quad \delta = 0.06$$

y un stock de capital inicial  $k_0$  igual a dos tercios del capital de estado estacionario  $k^*$ , utilizando el método de iteración de la función de valor. Usar una malla para el stock de capital de 500 puntos igualmente espaciados desde  $0.5k^*$  hasta  $1.2k^*$  y graficar las funciones de valor obtenidas en cada una de las iteraciones.

2) Considere una economía similar a la de la parte (1) sujeta a un shock tecnológico  $\mu$  que puede tomar los siguientes valores  $\mu \in \{0, 0.5, 1\}$  y con matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Resolver el modelo utilizando el método de iteración de la función de valor, con una malla para el stock de capital de 500 puntos igualmente espaciados desde 0 hasta  $1.5k^*$ . Partiendo con un  $k_0$  igual al stock de capital de estado estacionario y con  $\mu_0 = 0.5$ , simular y graficar una realización de la trayectoria óptima (una serie de tiempo) para el capital, consumo, producto, salario real y tasa de interés, por 50 períodos. Usando un promedio de 100 simulaciones, calcular la desviación estándar del logaritmo de cada una de las series obtenidas y su correlación con el producto.

## A.3. Tercera Sesión

Considere el siguiente modelo de Ciclos Económicos Reales. El agente representativo maximiza su utilidad esperada, que depende del consumo y el ocio:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log(c_t) + \theta \log(1 - l_t)]$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$c_t + i_t = w_t l_t + (1 - \tau) r_t k_t + T_t$$

en donde  $\tau$  es un impuesto (o subsidio, si menor que cero) proporcional al ingreso por renta del capital, cuya recaudación es devuelta mediante una transferencia  $T_t$ . La regla de acumulación de capital sigue siendo:

$$k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t$$

La firma representativa opera con una tecnología descrita por la función de producción:

$$F(K_t, L_t) = \mu K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

en donde  $\mu$  es un parámetro que mide la productividad.

Tanto el impuesto  $\tau$  como el parámetro productivo  $\mu$  están sujetos a shocks estocásticos, de la forma:

$$\begin{aligned}\tau_{t+1} &= \bar{\tau} + \varepsilon_{t+1} \\ \mu_{t+1} &= (1 - \frac{1}{2}) \mu_t + \frac{1}{2} \mu_t + \eta_{t+1}\end{aligned}$$

en donde los ruidos blancos se distribuyen conjuntamente de acuerdo a:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\tau^2 & \sigma_{\tau\eta} \\ \sigma_{\eta\tau} & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} \right)$$

1) Utilizando la siguiente parametrización:

$$\bar{\tau} = 0.99 \quad \delta = 0.3 \quad \alpha = 0.35 \quad \sigma_\tau = 0.06$$

$$\bar{\mu} = 0.7 \quad \frac{1}{2} = 0.5 \quad \sigma_\mu^2 = 0.01 \quad \sigma_\eta^2 = 0.02 \quad \sigma_{\tau\eta} = 0.001$$

resolver el modelo anterior mediante una aproximación lineal-cuadrática en torno al estado estacionario. Encontrar la regla de decisión óptima. Partiendo con un nivel de capital igual al de estado estacionario, simular y graficar una realización de la trayectoria óptima (una serie de tiempo) para el capital, consumo, empleo,

producto, salario real y tasa de interés por 50 periodos. Usando un promedio de 100 simulaciones, calcular la desviación estándar del logaritmo de cada una de las series obtenidas y su correlación con el producto.

2) Volver a simular y hallar los estadísticos para las series señaladas en la parte (1) en una economía sin shocks de política fiscal (con  $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_{12} = 0$ ). Comparar los resultados y evaluar el beneficio sobre el bienestar del agente representativo de eliminar las fluctuaciones de política fiscal.

## B. Librería de Programas en Matlab