Conceptos de riesgo y aversión al riesgo más allá de Utilidad Esperada Variaciones sobre el orden de dispersión de Bickel y Lehmann

Universidad de Chile, Septiembre - Octubre 2004

Alain Chateauneuf, *CERMSEM, U Paris I*

Michèle Cohen, *EUREQua, U Paris I*

Michael Landsberger, *Universidad de Haifa*

Isaac Meilijson, *Universidad de Tel Aviv*

Dominación de primer y segundo orden

Cruce único entre distribuciones

El orden dispersivo y Aumento en Riesgo monotónico

Tipos de aumento en riesgo

El problema de búsqueda de Chow & Robbins

Prima de seguro y el índice de Arrow & Pratt

Axiomas de von-Neumann & Morgenstern

Capacidad de Choquet

Utilidad Esperada dependiente de rangos

Función de percepción de probabilidad

Tipos de aversión al riesgo

Indices de "gula" y pesimismo

G menos ventajoso que F

Dominación de primer orden $\succsim_1$ o $\succ_1$

bajo los cuales para todo x

$$F(x) \leq G(x)$$

O, en algun espacio de probabilidad hay X y Z con

$$X \sim F \ , \ X + Z \sim G \ , \ Z \geq 0 \text{ a.s.}$$

O, para toda U creciente (t.q. bien definidos),

$$\int U dF \geq \int U dG$$

G más arriesgado que F (medias iguales)

Dilatación Martingala
Aumento en Riesgo Preservando Medias
Dominación de segundo orden $\succsim_2$ o $\succ_2$
Dominación convexa

bajo los cuales para todo x

$$\int_{-\infty}^{x} F(t)dt \leq \int_{-\infty}^{x} G(t)dt$$

O, en algun espacio de probabilidad hay X y Z con

$$X \sim F\ ,\ X + Z \sim G\ ,\ E[Z|X] = 0 \text{ a.s.}$$

O, para toda U cóncava (t.q. bien definidos),

$$\int U dF \geq \int U dG$$

Vasta literatura: **Hardy & Littlewood, Strassen, Rothschild & Stiglitz, Diamond & Stiglitz**, otros.

Ejemplo: **Cruce único** (Diamond & Stiglitz, Machina & Pratt).
$F \succsim_2 G$ sii G se obtiene de F por una sucesión de cruces únicos.

G es cruce único de F si $G(x) \geq F(x)$ para $x < x_0$ y $G(x) \leq F(x)$ para $x > x_0$.
O, $G^{-1}(v) - F^{-1}(v)$ es no-positivo bajo algún $v_0 \in [0, 1]$ y no-negativo en adelante.

Más fuerte (sin condiciones sobre medias)

Orden dispersivo (Bickel & Lehmann)

o bajo medias finitas iguales

Aumento en Riesgo Monotónico (Quiggin)

bajo los cuales G se obtiene de F como

Cruce único monotónico:
$G^{-1}(v) - F^{-1}(v)$ no-decreciente en $(0, 1)$.

O, G cruza en forma única cada translación horizontal de F.

Noción intermedia

Location-independent Risk (Jewitt) generado por

Cruce único monotónico a la izquierda: $G^{-1}(v) - F^{-1}(v)$ es no-decreciente donde es no-positiva.

O, G cruza en forma única cada translación horizontal de F hacia la izquierda.

Su imágen de espejo es

Cruce único monotónico a la derecha: $G^{-1}(v) - F^{-1}(v)$ es no-decreciente donde es no-negativa.

O, G c.u. cada translación horizontal de F hacia la derecha.

Cruce único monotónico es **transitivo**, define un orden estocástico. Los otros tres no lo son pero generan órdenes estocásticos por **clausura transitiva**.

Dominación estocástica de primer orden

$$\forall x \ : \ F(x) \leq G(x)$$

Dominación estocástica de 2^0 orden $\succ_{\sim 2}$

$$\forall x \ : \ \int_{-\infty}^{x} F(t)dt \leq \int_{-\infty}^{x} G(t)dt$$

Aumento en Riesgo Monotónico MIR

$$G^{-1} - F^{-1} \text{ no-decreciente,}$$

Aumento en Riesgo monotónico a la izquierda LMIR

$$\Phi_G^{-1} - \Phi_F^{-1} \text{ no-decreciente,}$$

donde $\Phi_H(x) = \int_{-\infty}^{x} H(t)dt$
es la función de distribución integrada, creciente, convexa, asintótica a 0 hacia $-\infty$ y a $x - E_H$ hacia $+\infty$.

El problema clásico de búsqueda de Chow & Robbins:

a los compradores les favorece la dispersión

Compradores reciben ofertas independientes Y_i, distribuídas F, a costo C c/u, y esperan óptimamente un precio no superando el límite de control

$$d = \Phi_F^{-1}(C)$$

que satisface

$$\Phi_F(d) = C$$

El costo óptimo total $\inf_\tau E[TC_{F,C,\tau}]$ es

$$E[Y|Y \leq \Phi_F^{-1}(C)] + \frac{C}{F(\Phi_F^{-1}(C))} = \Phi_F^{-1}(C)$$

Si las ofertas se distribuyen G en lugar de F, los G's **favoreciendo al comprador más que F para todo $C > 0$**:

$\forall C > 0$, el punto $\Phi_G^{-1}(C)$ donde Φ_G asume altura C queda **a la izquierda de** $\Phi_F^{-1}(C)$.

I.e., $\Phi_G \geq \Phi_F$, or $F \succ_{\sim 2} G$.

Riesgo de segundo grado ayuda a compradores pacientes a beneficiarse de **cola inferior pesada**.

Intuitivamente, en un mercado más disperso, el comprador muestrea más en expectativa a ofertas más bajas.

Bajo este argumento, $\forall C > 0$, el tamaño esperado de muestra

$$1/(1 - G(\Phi_G^{-1}(C)-))$$

bajo G debería superar aquel bajo F. I.e., $\forall C > 0$,

pendiente de $1 - G(\Phi_G^{-1}(C)) \leq$ **pendiente de** $1 - F(\Phi_F^{-1}(C))$

I.e., $\Phi_G^{-1}(C) - \Phi_F^{-1}(C)$ debe ser no-decreciente: G es **location-independent más arriegado** que F.

En un mercado monotónicamente-a -la-izquierda más disperso, los vendedores obtendrán un ingreso mucho menor, ya que además de favorecer a los compradores en el total, tendrán que subvencionar sus altos costos de muestreo.

Cruce único de toda translación horizontal, el orden dispersivo y Seguros bajo Utilidad Esperada

---

La fortuna aleatoria Y de Ursula se reemplaza por $E[Y] - C$ tal que

$$U(E[Y] - C) \geq E[U(Y)]$$

Víctor es **más averso al riesgo** que Ursula en el sentido de **Arrow & Pratt** si esta desigualdad implica

$$V(E[Y] - C) \geq E[V(Y)]$$

La celebrada condición **sii** para la preferencia automática de Victor por todo seguro **total** que acepte Ursula en lugar de quedar no asegurado, es que

$$V(\cdot) = \eta(U(\cdot))$$

para alguna función η no-decreciente y cóncava.

Esta noción de Arrow & Pratt's ha sido criticada por no funcionar bajo seguro parcial

$Y = X + Z$ puede ser dominado $\succsim_2$ por X y Ursula acepta pagar C por librarse del ruido Z

$$E[U(X - C)] \geq E[U(Y)]$$

pero Víctor **no** lo compra.

Víctor lo comprará si X domina a Y en el orden dispersivo (**L & M**)

El orden dispersivo es el más débil con esta propiedad, en la clase de U's **crecientes**.

Jewitt: El **Location-independent risk** es el más débil en la clase de U's **crecientes y cóncavas**.

Una caracterización de dispersión

G **es más disperso** que F sii para X y Z **co-monotónicos** , $X \sim F$ y $X + Z \sim G$.

Es decir, X y Z son funciones no-decrecientes de $X + Z$.

L & M. Para todos X y Z con medias finitas, existen co-monotónicos X^* y Z^* con $X^* + Z^* = X + Z$ a.s., tales que $X^* \succsim_2 X$ y $Z^* \succsim_2 Z$.

Por lo tanto, cada contrato de seguro que no respeta Arrow & Pratt puede ser reemplazado por uno que sí los respeta, **preferido por ambas partes**.

Alocaciones co-monotónicas son $\succsim_2$ **optimales Pareto**.

Idea de **Jewitt**:

Si las distribuciones de $X - C$ e Y cruzan en forma única, también lo hacen las de $U(X - C)$ y $U(Y)$ para todo U **non-decreciente**.

Por lo tanto, $U(X-C) \succsim_2 U(Y)$ si sus **medias** están ordenadas de esta forma. Lo están, si Ursula compra el contrato de seguro.

Tome el η de Arrow & Pratt como una utilidad aversa al riesgo técnica y obtenga que Víctor compra el contrato también:

$$E[V(X - C)] = E[\eta(U(X - C))] \geq$$
$$E[\eta(U(Y)] = E[V(Y)]$$

Si U is no-decreciente, se necesita todo C, **positivo** y **negativo**.

Si U es también cóncava, solo se necesita $C > 0$, asi es que **aumento en riesgo monotónico a la izquierda** es suficiente.

Los axiomas de **Savage** y **Von-Neumann & Morgenstern** y el criterio de Utilidad Esperada que implican han sido criticados por no imitar como decide Homo Sapiens.

Allais, Tversky & Kahnemann.

La crítica se centra en torno al **axioma de independencia**, bajo el cual si (la lotería) F es preferida a G,

$\lambda F + (1-\lambda)H$ es preferida a $\lambda G + (1-\lambda)H$ para todo $\lambda \in (0,1)$ y distribución H.

Se ha tratado de restringir comparaciones axiomáticas a variables aleatorias **co-monotónicas** en lugar de distribuciones marginales.

Schmeidler y otros han desarrollado modelos de probabilities no necesariamente aditivas, basados en el reemplazo de la integral en teoría de medida por

La capacidad de Choquet

Considere una función positiva y monotónica de conjuntos $\mathcal{V}$ y defina la **función de distribución** de una variable aleatoria W

$$F_W(x) = \mathcal{V}(\{\omega | W(\omega \leq x\})$$

para entonces proseguir y definir una especie de $E[W]$ como la integral **Lebesgue-Stieltjes** correspondiente.

Se debe tratar con cuidado transformaciones no monotónicas de variables.

Modelo de utilidad esperada dependiente de rangos - Rank-dependent expected utility model:

existe una **medida de probabilidad** P tal que

$\mathcal{V}(A)$ es una función no-decreciente de $P(A)$

El toma-decisiones "sabe" las probabilidades pero las **modifica** con el fin de calcular un índice de esperanza con el cual comparar variables aleatorias.

DM characterizado por función de utilidad u y

función de percepción de probabilidad f

creciente, $[0, 1] \to [0, 1]$ con $f(0) = 0, f(1) = 1$.

El funcional de Quiggin-Yaari V

DM prefiere X a Y sii $V(X) > V(Y)$

$$V(Z) = V_{u,f}(Z) = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x) df(P(Z > x))$$

Utilidad esp. $E[u(Z)]$**:** f identidad $f(p) \equiv p$.

Teoría dual de Yaari: u identidad $u(x) \equiv x$.

Esperanza $E[Z]$**:** u y f identidad.

$$P(Z = x_i) = p_i$$
$$P(Z > x_i) = q_i = \sum_{j=i+1}^{k} p_j$$

donde $x_i < x_{i+1}$, $i = 1 \dots k - 1$, entonces

$$\begin{aligned} V_{u,f}(Z) = u(x_1) \; &+ \; f(q_1)[u(x_2) - u(x_1)] \\ &+ \; f(q_2)[u(x_3) - u(x_2)] \\ &+ \; \cdots \\ &+ \; f(q_{k-1})[u(x_k) - u(x_{k-1})] \end{aligned}$$

tal como

$$\begin{aligned} E(Z) = x_1 \; &+ \; q_1[x_2 - x_1] \\ &+ \; q_2[x_3 - x_2] \\ &+ \; \cdots \\ &+ \; q_{k-1}[x_k - x_{k-1}] \end{aligned}$$

Aversión débil al riesgo: DM prefiere la esperanza de una variable a la variable misma.

Aversión fuerte al riesgo: DM prefiere antes que después en una Martingala. Aversión a dilatación o barrido (**balayage**) que preserva la media.

Aversión al riesgo monotónica, idem **izquierda**, idem **derecha**

Aversión al riesgo de **EU DM**: todos estos tipos son equivalentes, caracterizados por u cóncava.

Razón: Axioma de independencia de **vN&M**:
Constante a aleatorio es un generador bajo mezclas de **aleatorio a aleatorio**.

RDEU DM con u **cóncava** o **lineal**:

Aversión **débil, monotónica**: **Pesimismo** - f bajo la diagonal. **Quiggin**

Aversión **monotónica a la izquierda**: f bajo la diagonal y **estrellada** en 1. **CCM**

Aversión **monotónica a la derecha**: f bajo la diagonal y **estrellada** en 0. **CCM**

Aversión **fuerte**: f (bajo la diagonal y) **convexa**. **Chew, Karni & Safra**

Análisis **Yaari** de una distribución con k átomos, incluyendo

$$x_i < x_j$$

sujeta a una dilatación que preserva la media (**mean-preserving spread**):

$$\begin{array}{c} x_i \text{ se mueve a } x_i - \epsilon P(X = x_j) \\ x_j \text{ se mueve a } x_j + \epsilon P(X = x_i) \end{array}$$

Dilatación general: $k = 4, i = 2$ y $j = 3$. $V_{I,f}(Y) - V_{I,f}(X)$ is

$$\epsilon(q_1 - q_3)[f(q_2) - \frac{q_2 - q_3}{q_1 - q_3} f(q_1) - \frac{q_1 - q_2}{q_1 - q_3} f(q_3)]$$

f debe ser **convexa**.

Dilatación de extremos: $k = 3, i = 1$ y $j = 3$.

$$V_{I,f}(Y) - V_{I,f}(X) = \epsilon(1 - q_1)q_2[\frac{f(q_2)}{q_2} - \frac{1 - f(q_1)}{1 - q_1}]$$

f debe ser **bajo la diagonal**.

Dilatación de pérdidas: $k = 3, i = 1$ y $j = 2$. Entonces $V_{I,f}(Y) - V_{I,f}(X)$ es

$$\epsilon(1 - q_1)(1 - q_2)[\frac{1 - f(q_2)}{1 - q_2} - \frac{1 - f(q_1)}{1 - q_1}]$$

f debe ser **estrellada en** 1.

Dilatación de ganancias: $k = 3, i = 2$ y $j = 3$. Entonces

$$V_{I,f}(Y) - V_{I,f}(X) = \epsilon q_1 q_2[\frac{f(q_2)}{q_2} - \frac{f(q_1)}{q_1}]$$

f debe ser **estrellada en** 0.

Para estudiar el efecto de cada tipo de dilatación sobre (**Quiggin-Yaari**) $V_{u,f}$, es suficiente considerar (**Yaari**) $V_{I,f}$.

Hasta ahora postulamos utilidad **cóncava**.

Chew, Karni & Safra demostraron que concavidad de f es necesaria para aversión fuerte al riesgo.

Chateauneuf & Cohen demostraron que concavidad de f es necesaria para cada tipo **lateral** de aversión a menos que $f'(0) = 0$ o $f'(1) = \infty$.

Chateauneuf, Cohen & M. characterizaron los pares (u, f) que muestran aversión **monotónica** al riesgo:

Indice de gula (no concavidad) de u (diferenciable)

$$G_u = \sup_{x<y} \frac{u'(y)}{u'(x)}$$

$G_u \geq 1$. Es 1 sii u es cóncava.

Indice de pesimismo de f

$$P_f = \inf_q \frac{1-f(q)}{f(q)} / \frac{1-q}{q}$$

$P_f \geq 1$. Si f is lineal, $P_f = 1$.

El DM es averso monotónico al riesgo sii es **más pesimista que goloso CCM**

Necesidad se obtiene dilatando distribuciones con dos átomos y un poco de suerte:

$$P(Y = y_2) = 1 - v \ , \ P(Y = y_3) = v$$
$$\frac{y_4 - y_3}{y_2 - y_1} = \frac{1-v}{v}$$

$$\frac{u(y_4)-u(y_3)}{y_4-y_3}\Big/\frac{u(y_2)-u(y_1)}{y_2-y_1} \le \frac{1-f(v)}{f(v)}\Big/\frac{f(v)}{v}$$

Suerte: el supremo de la izquierda es independiente de v.

Trabajo similar para aversión débil al riesgo da un índice más débil de pesimismo, sin suerte - depende de v, conduciendo a una condición necesaria **funcional** para aversión débil al riesgo.

La condición parece no ser suficiente - pero no tenemos un contraejemplo.

Sin embargo, la condicion is sii para f convexa:

La búsqueda de la simplicidad

Si f es convexa, el DM prefiere a toda variable aleatoria **alguna** variable aleatoria dicotómica con la misma media.

Estamos tratando de extender de RDEU a Choquet por medio del valor de Shapley en Teoría de Juegos.

Technical geometric material

$$\begin{aligned}\Psi_H(x) &= \int_x^{\infty}(1-H(t))dt = E[\max(Z-x,0)] \\ \Phi_H(x) &= \int_{-\infty}^{x} H(t)dt = \Psi_H(x) + x - E[Z]\end{aligned}$$

Convex, non-negative, slope below 1.
Φ incr. from zero, asymptotic at ∞ to $x - E[Z]$.
Ψ decr. to zero, asymptotic at $-\infty$ to $E[Z] - x$.

Given F and G with equal means, G is a MPIR w.r.t. F if $\Phi_G(x) \geq \Phi_F(x)$ for all $x \in \mathcal{R}$, or equivalently, if $\Psi_G(x) \geq \Psi_F(x)$ for all $x \in \mathcal{R}$.

Equivalent for equal means, SDD of G by F is the first condition and Convex Dominance of F by G, the second condition.

Let $p \in (0,1)$ and consider line with slope p tangent to Φ. It intersects the x-axis at barycenter of lower p-quantile

$$L_H(p) = E[H^{-1}(U)|U < p] = \frac{\int_0^p H^{-1}(q)dq}{p}$$

Φ_G majorizes Φ_F if and only if L_F majorizes L_G (**Lorenz**).

G is **location-independent riskier** than F if $\Phi_G(G^{-1}(q)) \geq \Phi_F(F^{-1}(q))$ for every $q \in (0,1)$.

If G is LIR than F and have the same mean, G is **left-monotone riskier** than F.

Φ_H is convex, supported at $H^{-1}(q)$ by a linear tangent with slope q.

$\Phi_G(G^{-1}(q)) \geq \Phi_F(F^{-1}(q))$ means that wherever Φ_G and Φ_F have the same slope, Φ_G is higher.

Or, if Φ_G and Φ_F have same height, Φ_G has smaller slope.

L & M: G is LIR than F iff the horizontal distance $\Phi_G^{-1}(x) - \Phi_F^{-1}(x)$ is non-decreasing in $x \in \mathcal{R}^+$.
L & M: G is LIR than F iff G is the limit of F_i such that $F_0 = F$ and for each $i \geq 1$, F_i left-monotonically single crosses F_{i-1}.

Deductible insurance left monotonically dominates any other:

Arrow: for given premium off expected value, insurance contracts with deductible are optimal for EU risk averse agents.

Gollier & Schlesinger: extended to agents averse to MPIR, independently of decision model under risk.

Vergnaud extended further: insured position induced by any contract with given premium is left-monotone riskier than the insured position induced by the corresp. contract with deductible.

Chateauneuf, Cohen and Vergnaud: aversion to left-monotone risk – weakest notion of RA under which deductible insurance contracts are optimal.

This complements **Jewitt**'s claim on the behavior of the Arrow-Pratt index.

Star-shapedness of f at 0 and at 1 sharpens the edge between EU and RDEU.

Let a RA EU DM with utility u be offered full insurance for a single loss L that occurs with probability $1-p$ to her house worth W.

Fair premium is $P_f = (1-p)L$ and supremal premium that can be extracted from the agent is $P_s = W - u^{-1}$(u(W-L) (1-p) + u(W) p) so the **load factor** the agent can withstand is

$$LF_{EU} = \frac{P_s}{P_f} =$$

$$\frac{W - u^{-1}(u(W) - (1-p)(u(W) - u(W-L)))}{(1-p)L} =$$

$$\frac{u(W) - u(W-L)}{L} \; \frac{u^{-1}(v) - u^{-1}(v-\Delta)}{\Delta}$$

where $v = u(W)$ and $\Delta = (1-p)(u(W) - u(W-L))$. u concave implies u^{-1} convex: the load factor is non-decreasing in p.

EU RA has clear cut effect: willingness to pay relatively more for a rarer loss event.

We now study this question in terms of f, by its effect on the Yaari index.

The load factor is $LF_{Yaari} = \frac{1-f(p)}{1-p}$, non-decreasing iff f is star-shaped at 1.

Among the RDEU agents with linear utility, those with perception function star-shaped at 1 are precisely the ones that display the unanimous attitude of EU RA on this issue.

A related question involving lotteries instead of insurance is the attitude of EU RA to a lottery with price C and probability p of winning a single prize K.

EU RA demand relatively higher prizes as compensation for lower winning probabilities.

The top-prize load factor under Yaari is $\frac{p}{f(p)}$, non-increasing iff f is star-shaped at 0.

Although RDEU pessimism is more flexible than EU risk aversion, this flexibility is distinctly normative.

If G is a left-monotone single crossing of F then G is left-monotone riskier than F:

$$\Phi_F(F^{-1}(p)) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(p)} F(t)dt =$$

$$\int_0^p q dF^{-1}(q) = pF^{-1}(p) - \int_0^p F^{-1}(q)dq$$

so

$$\Phi_G(G^{-1}(p)) - \Phi_F(F^{-1}(p)) =$$

$$\int_0^p [(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)) - (G^{-1}(q) - F^{-1}(q))dq =$$

$$p[G^{-1}(p) - F^{-1}(p) + L_F(p) - L_G(p)]$$

For p below the s. c., integrand non-negative.

For p above the s. c., integral non-negative – Lorenz char. of SDD and s. c. implies SDD.

$$\Phi_H^{-1}(x) - \Phi_F^{-1}(x) =$$

$$(\Phi_H^{-1}(x) - \Phi_G^{-1}(x)) + (\Phi_G^{-1}(x) - \Phi_F^{-1}(x))$$

so left-monotone increase in risk is transitive. G generated from F by sequence of left-monotone s. c., is left-monotone riskier than F.

References

[1] Arrow, K., (1971). *Essays in the theory of risk bearing*. North Holland Publishing Co: Amsterdam–London.

[2] Bickel, P. J. and E. L. Lehmann, (1976). Descriptive statistics for non-parametric models, III. Dispersion. *Annals of Statistics*, **4**, 1139–1158.

[3] Bickel, P. J. and E. L. Lehmann, (1979). Descriptive statistics for non-parametric models, IV. Spread. In *Contributions to Statistics*, Jureckova (Ed.), Reidel.

[4] Chateauneuf, A., (1996). Decreasing inequality : an approach through non-additive models, *Cahiers Ecomath*, Paris I, 96.58.

[5] Chateauneuf, A., (1991). On the use of capacities in modeling uncertainty aversion and risk aversion. *Journal of Mathematical Economics*, **20**, 343–369.

[6] Chateauneuf, A., M. Cohen and R. Kast, (1997). A review of some results related to comonotonicity. *Cahiers Eco & Maths*, **97.32**, Université Paris I.

[7] Chateauneuf, A., M. Cohen and I. Meilijson, (1997). More pessimism than greediness : a characterization of monotone risk aversion in the Rank Dependent Expected Utility model, *Cahiers Eco & Maths*, **97.53**, Université Paris I.

[8] Chateauneuf, A., M. Cohen and Vergnaud, J. C., (2001). Left-monotone reduction of risk, deductible and call. Mimeo.

[9] Chew, S., E. Karni and Z. Safra, (1987). Risk aversion in the theory of expected utility with Rank Dependent preferences. *Journal of Economic Theory*, **42**, 370-381.

[10] Chow, Y. S. and H. Robbins, (1963). On optimal stopping rules. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **2**, 33–49.

[11] Cohen, M., (1995). Risk aversion concepts in expected- and non-expected-utility models. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, **20**, 73–91.

[12] Diamond, P. and J. Stiglitz, (1974). Increases in risk and risk aversion. *Journal of Economic Theory*, **8**, 337–360.

[13] Gollier, C. and H. Schlesinger, (1996). Arrow's theorem on the optimality of deductibles: a stochastic dominance approach. *Economic Theory*, **7**, 359–364.

[14] Hadar, J. and W. Russel, (1969). Rules for ordering uncertain prospects. *american Economic Review*, **59**, 25–34.

[15] Hanoch, G. and H. Levy, (1969). The efficiency analysis of choices involving risk. *Review of Economic Studies*, **36**, 335–346.

[16] Hardy, G. H., J. E. Littlewood and G. Polya, (1934) *Inequalities*. Cambridge University Press, (2nd edition, 1952).

[17] Jewitt, I., (1987). Risk aversion and the choice between risky prospects: the preservation of comparative statics results. *Review of Economic Studies*, **54**, 73–85.

[18] Jewitt, I., (1989). Choosing between risky prospects: the characterisation of comparative static results and location independent risk. *Management Science*, **35**, 60–70.

[19] Karni, E. and A. Schwartz, (1977). Search Theory: the case of search with uncertain recall. *Journal of Economic Theory*, **16**, 38–52.

[20] Karni, E. and A. Schwartz, (1977). Two theorems on optimal stopping with backward solicitation. *Journal of Applied Probability,* **14**, 869–875.

[21] Landsberger, M. and I. Meilijson, (1990). Demand for Risky Financial Assets: A Portfolio Analysis. *Journal of Economic Theory*, **50**, 204-213.

[22] Landsberger, M. and I. Meilijson, (1992). Lotteries, Insurance and Star-shaped utility functions. *Journal of Economic Theory*, **52**, 1–17.

[23] Landsberger, M. and I. Meilijson, (1994). Co-monotone allocations, Bickel-Lehmann dispersion and the Arrow-Pratt measure of risk aversion. *Annals of Operations Research*, **52**, 97–106.

[24] Landsberger, M. and I. Meilijson, (1994). The generating process and an extension of Jewitt's location independent risk concept. *Management Science*, **40**, 662–669.

[25] Lehmann, E., (1959) *Testing Statistical Hypotheses.* Wiley: New York.

[26] Lorenz, M. O., (1905). Methods of measuring concentration of wealth, *J. of American Stat. Association*, **9**, 209-219.

[27] Machina, M. J. and J. W. Pratt, (1997). Increasing risk: some direct constructions. *Journal of Risk and Uncertainty*, **14–15**, 103–127.

[28] Marshall, A. W. and I. Olkin, (1979). *Inequalities: theory of majorization and its applications.* Academic Press: New York.

[29] Moyes, P., (1994). Inequality reducing and inequality preserving transformations of incomes: symmetric and individualistic transformations. *Journal of Economic Theory*, **63**, 271–298.

[30] Pratt, J. W., (1964). Risk Aversion in the small and large, *Econometrica*, *32*, 122–136.

[31] Quiggin, J., (1982). A theory of anticipated utility, *Journal of Economic Behavior and Organization*, **3**, 323-343.

[32] Quiggin, J., (1992). Increasing risk : another definition, in Chikan (Ed), Progress in Decision Utility and Risk Theory. Kluwer: Dordrecht.

[33] Ross, S. (1981). Some stronger measures of risk aversion in the small and the large with applications, *Econometrica*, **49, 3**, 621-638.

[34] Rothschild, M. and J. Stiglitz, (1970). Increasing Risk: I. A definition. *Journal of Economic Theory*, **2**, 225–243.

[35] Rothschild, M. and J. Stiglitz, (1970). Increasing Risk: II. Its economic consequences. *Journal of Economic Theory*, **3**, 66–84.

[36] Strassen, V. (1965). The existence of probability measures with given marginals, *Ann. Math. Stat.*, **36**, 423–439.

[37] Vergnaud, J. C. (1997). Analysis of risk in a non-expected utility framework and application to the optimality of the deductible. *Finance*, **18-1**, 155–167.

[38] von Neumann, J. and O. Morgenstern, (1947). Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, (3rd edition, 1954).

[39] Wilson, (1968). The theory of syndicates, *Econometrica*, **36**, 119-138.

[40] Yaari, M. E. (1984). Risk aversion without diminishing marginal utility. International Center for Economics and Related Disciplines, London.

[41] Yaari, M. E. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, **55**, 95–115.

[42] Yaari, M. E. (1988). A controversial proposal concerning inequality measurement. *Journal of Economic Theory*, **44**, 381–397.