

PAUTA PREGUNTA COMPONENTES PRINCIPALES

a)

Dada la matriz de varianzas-covarianzas S:

$$S = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.15 & -0.19 \\ 0.15 & 0.13 & -0.03 \\ -0.19 & -0.03 & 0.16 \end{bmatrix}$$

Para encontrar los valores propios de una matriz, que posee la matriz S como var-cov es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones y encontrar el determinante de:

$$|S - \lambda I| = 0$$

El cual es posible describirlo en forma matricial de la siguiente manera:

$$: \left| \begin{bmatrix} 0.35 & 0.15 & -0.19 \\ 0.15 & 0.13 & -0.03 \\ -0.19 & -0.03 & 0.16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| :$$

Con este sistema es posible encontrar los valores de los coeficientes que acompañan al polinomio característico de orden 3, el cual está definido en la siguiente expresión:

$$0.000382 - 0.0628\lambda + 0.64\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

La solución de este sistema es:

$$\lambda_1 = 0,00651$$

$$\lambda_2 = 0,113$$

$$\lambda_3 = 0,521$$

b)

Para calcular la matriz de vectores propios es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S \cdot V = \lambda \cdot V$$

Para el primer componente (los otros se calculan de igual forma):

$$\begin{bmatrix} 0.35 & 0.15 & -0.19 \\ 0.15 & 0.13 & -0.03 \\ -0.19 & -0.03 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} = 0.521 \times \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.171a_{11} + 0.15a_{12} - 0.19a_{13} \\ 0.15a_{11} - 0.391a_{12} - 0.03a_{13} \\ -0.19a_{11} - 0.03a_{12} - 0.361a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -0.817 \\ -0.349 \\ 0.459 \end{bmatrix}$$

Al resolver para los demás componentes la solución es:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.575 & 0.042 & -0.817 \\ -0.551 & 0.757 & -0.348 \\ 0.604 & 0.651 & 0.459 \end{bmatrix}$$

c)

Debido al valor de los valores propios es posible ordenarlos por la importancia relativa de cada uno de ellos en función a la explicación de la varianza (mayor a menor):

$$\lambda_3=0,521 > \lambda_2=0,113 > \lambda_1=0,00651$$

De esta forma es posible calcular la medida de información usando la siguiente expresión para las p componentes elegidas:

$$\text{M.I.} = \frac{\sum_1^p \lambda_i}{\sum_1^3 \lambda_i}$$

Es posible obtener:

Valor propio	Suma acumulada
0,5208	81,38%
0,1127	98,98%
0,0065	100,00%

En conclusión, con solo los **2 componentes principales** es posible explicar mas del 95% de la varianza.

Dudas, consultas, comentarios:
jmiranda@dii.uchile.cl