



Tarea 3

Problema 1

En cierto local de la ciudad se acaba de instalar “La Casa del Taca-taca”. A dicho local concurren estudiantes de acuerdo a un proceso Poisson de parámetro λ (estudiantes/hora). Cada estudiante, al entrar al local, paga una entrada de E [\$], que le da derecho a jugar un partido de taca-taca. En el local hay dos taca-tacas, los cuales pueden ser utilizados en modalidad singles (dos jugadores en un taca-taca) o dobles (cuatro jugadores en un taca-taca). La duración de un partido es una variable aleatoria exponencialmente distribuida con media $1/\mu$ [hr], independiente de si el partido es single o doble. Además el local cuenta con un amplio espacio para acomodar a quienes esperan su turno.

Las reglas de buena convivencia del local no permiten que un taca-taca sea usado en modalidad single si hay dos o más personas esperando para jugar. No obstante lo anterior, los jugadores prefieren la modalidad single, y jugarán de este modo siempre que sea posible, sin violar la regla antes mencionada. Note que esta forma de comportamiento permite que jugadores que comenzaron jugando un doble se repartan en dos taca-tacas para concluir su partido en modalidad single, en caso de desocuparse el otro taca-taca. De esta forma, jugadores que comenzaron jugando un single admitirán que se incorporen al partido dos jugadores más en caso que éstos lleguen al local y no haya otro taca-taca desocupado. Cuando un partido termina todos los jugadores que están participando en él se retiran del local.

1. Muestre que con las reglas de comportamiento descritas el estado de ocupación del local puede modelarse como una cadena de Markov en tiempo continuo. Dibuje el grafo asociado y las tasas de transición entre estados. ¿Qué relación deben cumplir λ y m para que exista estado estacionario?. Escriba el sistema de ecuaciones a partir del cual es posible calcular las probabilidades estacionarias (no es necesario que lo resuelva).

Para lo que sigue suponga que el sistema alcanza estado estacionario.

1. A los taca-tacas se les debe hacer una mantención mensual, la que tiene un costo de $M(t_1, t_2)$ dado por:

$$M(t_1, t_2) = a \cdot t_1 + b \cdot t_2$$

donde t_1 y t_2 corresponden al total de horas jugadas durante el mes en modalidad single y doble respectivamente. Los parámetros a y b están medidos en [\$/hora] con ($a < b$). Calcule en términos de λ , m , a , b y las probabilidades estacionarias el mínimo valor que puede tener el valor de la entrada E de modo que el negocio pueda financiarse en el largo plazo.

Problema 2

La llegada de clientes a un banco sigue un proceso de poisson de tasa λ . Una vez dentro del banco los clientes se encuentran frente a dos sistemas M/M/1, y deben elegir a que cola colocarse. Lógicamente los clientes siempre escogern la cola que tenga el menor largo y ante empates elegirán equiprobabilísticamente.

Adicionalmente, una vez que eligen la cola a la que se colocan no pueden cambiar su elección. Suponga que los tiempos de atención son iguales en ambos sistemas, y exponencialmente distribuidos de media $\frac{1}{\mu}$.

1. Modele el número de personas en cada cola como una cadena de Markov en tiempo continuo. Explícite claramente todas las transiciones posibles indicando las tasas respectivas, ¿Cuál es la condición de estacionariedad?
2. Escriba las ecuaciones que le permitan encontrar la distribución de probabilidades estacionarias.
3. Encuentre la fracción del tiempo que la cola 1 se encuentra sin clientes. HINT : Escriba una ecuación diferencial para el número esperado de personas en el sistema y razone por simetría.
4. Compare la eficiencia de este sistema con la modalidad de “cola única”.
5. ¿Qué modificaciones realizaría al modelo si permitiese que los clientes que ya ingresaron al sistema pudiesen cambiarse de cola ante diferencias en el largo de estas?. Explique claramente sus supuestos, ¿Cómo se compara este sistema con un M/M/2?

Problema 3

A un aeropuerto internacional llegan vuelos según un Proceso de Poisson de tasa λ [vuelos/hora]. La cantidad de pasajeros que trae cada vuelo puede ser descrita por una variable aleatoria que toma valores enteros entre m_{min} y m_{max} ($m_{min} < m_{max}$). Las variables aleatorias que representan las cantidades de pasajeros en vuelos distintos son independientes e idénticamente distribuidas. Asuma que p_k es la probabilidad de que un vuelo traiga k pasajeros.

Los pasajeros que llegan pueden ser “nacionales”, retornando al país, o “extranjeros”, que vienen de visita. Un pasajero cualquiera, independiente de todo lo demás, es “nacional” con probabilidad p y “extranjero” con probabilidad $(1 - p)$.

1. Dado que en un vuelo vienen $i + j$ pasajeros, calcule la probabilidad de que i pasajeros sean nacionales y j sean extranjeros. Llame q_{ij} a esta probabilidad.
2. Utilizando los resultados obtenidos en el punto (1), calcule la probabilidad de que en un vuelo cualquiera haya exactamente i pasajeros nacionales y j extranjeros. Llame r_{ij} a esta probabilidad.

Una vez en el aeropuerto todos los pasajeros se dirigen directamente a la oficina de migraciones, donde esperan en dos filas separadas: una para pasajeros nacionales y otra para pasajeros extranjeros.

En la oficina de migraciones trabaja un solo empleado, el cual requiere de un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ [horas] para atender a un pasajero, independiente de su procedencia. Además considere que en caso de existir pasajeros esperando, el siguiente pasajero a ser atendido por el empleado es escogido de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si la cantidad de pasajeros esperando en la fila de nacionales es **mayor o igual** a la cantidad de pasajeros esperando en la fila de extranjeros, el próximo pasajero en ser atendido será el primero en la fila de nacionales;
- Si la cantidad de pasajeros esperando en la fila de nacionales es **menor** a la cantidad de pasajeros esperando en la fila de extranjeros, el próximo pasajero en ser atendido será el primero en la fila de extranjeros.

Teniendo en cuenta lo anterior, responda las siguientes preguntas:

3. Modele el número de personas en las filas como una cadena de Markov en tiempo continuo. Explícite los estados posibles y las tasas de transición.

Hint: Si pretende hacer un dibujo, considere apenas un estado genérico de la cadena y los estados a que puede haber transiciones.

4. Calcule la “tasa efectiva” de llegada de pasajeros al aeropuerto. A partir de este valor explicita las condiciones para que el sistema alcance el estado estacionario.
5. ¿Cómo se debería modificar el modelo si las tasas de atención dependiesen del tipo de pasajero que está siendo atendido? Específicamente, considere que los tiempos de atención puede ser descritos por variables aleatorias de distribución exponencial de media $1/\mu_N$ [horas] para los pasajeros nacionales y de media $1/\mu_E$ [horas] para los extranjeros.

Hint: Analice si es necesario incluir algún dato adicional en la definición de los estados y cuáles transiciones cambian.

Problema 4

Don King, flamante gerente del único banco que existe en un pequeño pueblito llamado Larjentina, ha decidido implementar una novedosa política de atención.

En el banco existen 2 cajas, pero sólo una cajera, la cual tarda en atender a un cliente, un tiempo que sigue una variable aleatoria exponencial de parámetro μ .

Al comienzo del día, al abrirse las puertas del recinto, la cajera se ubica en su puesto de trabajo, mientras que la otra caja se encuentra cerrada.

Esta configuración se mantiene hasta que el largo de la cola de espera, alcanza las R personas, momento en el cual el guardia del recinto, apodado Don Güily, ágilmente se ubica en la caja cerrada y comienza a atender público. Considere que bajo esta nueva situación se mantiene **una fila única**, y que el tiempo de atención de Don Güily, también sigue una distribución exponencial de parámetro μ .

El guardia se mantendrá en la caja, hasta que no queden personas en el sistema, instante en el cual volverá a sus labores de seguridad y la cajera quedará nuevamente atendiendo sola.

Por otro lado, la llegada de clientes al banco sigue un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora].

Finalmente suponga que la capacidad del banco es ilimitada, y desde que el sistema parte vacío estará operando por mucho tiempo.

1. Argumente porqué no es posible modelar el sistema descrito como una cadena de Markov en tiempo continuo cuyos estados registren sólo el número de personas en el banco. ¿Qué información adicional es necesaria? Justifique.
2. Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo continuo.
3. Encuentre la condición de existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que le permitirían calcularlas.

Considerando conocidas las probabilidades estacionarias, responda las siguientes preguntas:

4. ¿Qué fracción del tiempo, Don Güily se encuentra atendiendo clientes en la caja?
5. En promedio, ¿cuántos clientes son atendidos por el guardia en una hora?
6. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que entra al sistema cuando hay 2 cajas operando, sea atendido por el guardia?

Problema 5

Armijo Catalán, quien se encuentra de compras en un renombrado mall capitalino, ha decidido saciar su hambre y se dirige presto al patio de comidas del recinto. El patio de comidas consta de N locales, dispuestos en forma circular en torno al sector de mesas, donde los asistentes pueden disfrutar de sus nutritivas meriendas. Armijo, tan suspicaz como siempre, nota inmediatamente que los clientes llegan al patio de comidas de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [Clientes / hora]. Estos clientes eligen completamente al azar el local en el cual comprarán su comida.

Cada local es atendido por un único servidor, el que demora un tiempo aleatorio de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ en entregar a los clientes su comida (igual para todos los locales).

Los clientes que abandonan un local se dirigen rápidamente al sector de mesas, donde disfrutan de su comida. El tiempo que demora un cliente cualquiera en ingerir su alimento se distribuye exponencialmente con media $\frac{1}{\gamma}$.

Un cliente que termina su comida, independiente de cuantos locales ya haya visitado, con probabilidad p se apresurará a conseguir otro plato, esta vez del local inmediatamente a la derecha del último local en el que compro. Con probabilidad q comprará en el local inmediatamente a la izquierda del último en el que compro, y con probabilidad r se retirará del patio de comidas a proseguir su día de compras, probablemente ya satisfecho ($p + q + r = 1$).

Considere finalmente que Armijo, siendo una persona completamente normal, seguirá el mismo patrón de comportamiento.

1. (1,0 pts.) Modele el sistema descrito anteriormente como una red de colas. Especifique claramente cada uno de los sistemas e identifique sus parámetros.
2. (1,0 pts.) Encuentre la tasa efectiva de llegada a cada uno de los locales y encuentre la condición de estacionaridad del sistema.
3. (1,0 pts.) Cuantas personas hay en promedio en el patio de comidas?. Cuanto tiempo estará Armijo en el patio de comidas? Cuanto tiempo en promedio estuvo Armijo comiendo (es decir, sentado en el sector de comidas)?. Cual es la probabilidad que Armijo haya comido k veces.

En el patio de Comidas existe un único local (digamos, el local 1) que sirve el plato favorito de Armijo (Chuletas con pure de papas). De lograr llegar a este local Armijo alcanzaría la felicidad absoluta. En caso contrario será miserable por siempre (suponga que Armijo solo visita 1 vez el mall, y por lo tanto el patio de comidas).

4. (1,0 pts.) Modele el local en el que se encuentra comiendo Armijo como una cadena de Markov en tiempo discreto.
5. ¿Cuál es la probabilidad de que Armijo alcance la felicidad?
6. Suponiendo que Armijo tiene un estómago insaciable (es decir, nunca se retirará del patio), calcule la probabilidad de que Armijo alcance la felicidad solo tras recorrer todos los locales del patio (es decir, la probabilidad de visitar en último lugar el local 1). HINT: Recuerde el Dilema del Rey Armijo en el control 2.

Problema 6

Los alumnos de uno de los postgrados del D.I.I. se aprestan a rendir su examen de final de su curso favorito, "Procedimientos Escolásticos". El ayudante del ramo recibe los exámenes de acuerdo a un proceso de Poisson

de tasa λ [exámenes / hora] y los corrige demorándose un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_1$ [horas] en cada uno. Como resultado de su corrección el ayudante puede decidir aprobar al alumno o bien traspasar la evaluación a Saúl Peugeot, flamante profesor del ramo, para que él tome la decisión. La probabilidad de que una evaluación cualquiera sea transferida al profesor es p . El Profesor demora un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_2$ [horas] en estudiar una situación cualquiera. Su decisión puede ser la aprobación o reprobación del alumno, y se sabe que reprueba a una fracción R de las evaluaciones que recibe. En los casos en que se decide reprobar a un alumno, el profesor debe publicar inmediatamente esta situación.

Por otra parte, en el caso que un alumno sea aprobado, ya sea por el ayudante o el profesor, se deben cumplir una serie de procedimientos administrativos (cálculos de promedios y otras cosas varias) los que terminarán con la publicación de la situación final y la respectiva nota del examen. Estos trámites son realizados con mucha dedicación ya sea por Natasha Yenkowitch o Felix Desaire, auxiliares del ramo, demorando un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_3$ [horas] por cada alumno aprobado.

1. Modele el proceso descrito como un sistema de colas. ¿Qué relaciones deben satisfacer λ , μ_1 , μ_2 , μ_3 , p y R para que se alcance régimen estacionario?.
2. En promedio, ¿Cuánto tiempo debe esperar un alumno desde que entrega su examen hasta ver publicada su situación final?.
3. ¿Qué fracción de los alumnos que resultan aprobados ha sido por decisión del profesor?.
4. Sólo para los alumnos que son aprobados: ¿Cuánto tiempo pasa, en promedio, desde que se recibe el examen hasta que se publican sus notas y situación final?.
5. Suponga que la dirección del postgrado puede contratar más auxiliares para la tramitación y cálculo de notas finales de los alumnos aprobados por el ayudante o el profesor. Entregue una cota superior (lo más pequeña posible) para la disminución que se puede lograr por esta vía en el indicador calculado en la parte anterior.