

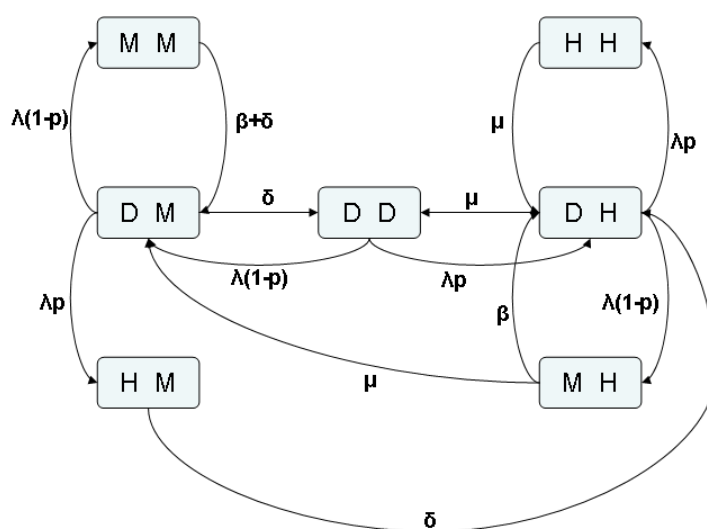


Clase Auxiliar 10 de Octubre, 2003

CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

Problema 1

1. La cadena de Markov queda de la siguiente forma:



2. Tenemos una cadena irreducible y finita \rightarrow Existen probabilidades estacionarias.
Para encontrarlas debemos plantear el sistema de ecuaciones de balance en los nodos. El sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \pi_{DD} \cdot \lambda &= \pi_{DM} \cdot \gamma + \pi_{DH} \cdot \mu \\
 \pi_{DM} \cdot (\lambda + \gamma) &= \pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) + \pi_{DD} \cdot \lambda(1 - p) + \pi_{MH} \cdot \mu \\
 \pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) &= \pi_{DM} \cdot \lambda(1 - p) \\
 \pi_{HM} \cdot \gamma &= \pi_{DM} \cdot \lambda p \\
 \pi_{DH} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{HH} \cdot \mu + \pi_{DD} \cdot \lambda p + \pi_{MH} \cdot \beta + \pi_{HM} \cdot \gamma \\
 \pi_{HH} \cdot \mu &= \pi_{DH} \cdot \lambda p \\
 \pi_{MH} \cdot (\beta + \mu) &= \pi_{DH} \cdot \lambda(1 - p) \\
 \sum_i \pi_i &= 1
 \end{aligned}$$

3. Consideramos conocidas las probabilidades estacionarias:

- a) Primero identificamos los estados en los cuales, de llegar un alumno, se deberá retirar por que encuentra ambos lugares ocupados. Entonces, dado que en cada uno de estos estados la tasa de llegada de alumnos es la misma (λ), tendremos que:

$$E[\text{Alumnos perdidos}] = \lambda \cdot (\pi_{MM} + \pi_{HH} + \pi_{HM} + \pi_{MH})$$

- b) Si un hombre llega y encuentra un lugar, la esperanza del tiempo de espera dependerá del estado en el que encuentra al sistema. De esta forma:

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DD}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot 0 + \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

- c) Si la persona que esta antes que ella (atendiendose) es un hombre, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

$$\frac{\beta}{\beta + \mu}$$

Si la persona que esta antes que ella (atendiendose) es una mujer, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\gamma}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

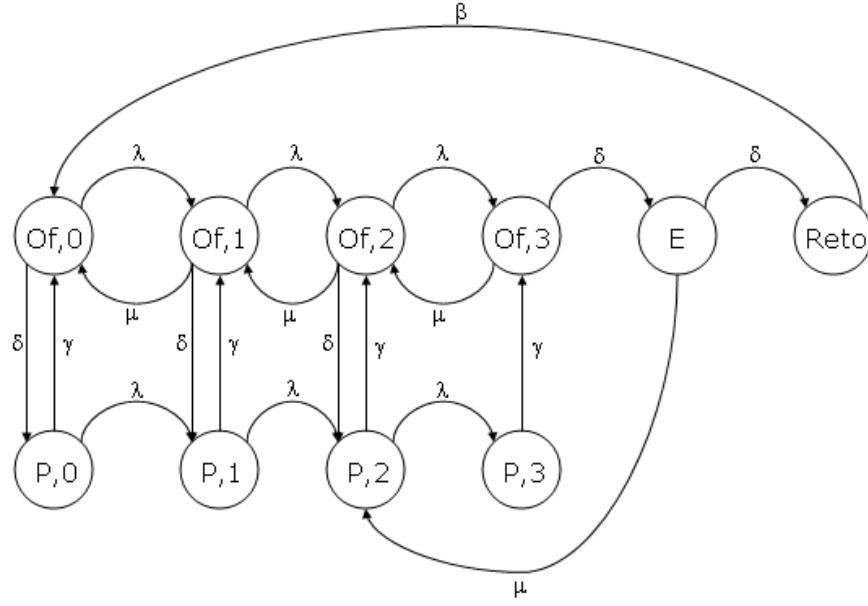
$$\frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

Para calcular la probabilidad solo debemos ponderar por la probabilidad de encontrar al sistema en un estado en particular.

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

Problema 2

- Para modelar esta situación como una cadena de Markov debemos considerar la localización de Armijo, ya que solo si se encuentra trabajando podrá responder correo, pero el correo le llegará en cualquier localización. Además debemos distinguir un estado especial donde Armijo tendrá tres mails acumulados y un llamado perdido por parte de su novia, esto por que solo desde aquí se podrá viajar a un estado de reto o al estado donde esta con su novia y tiene 2 mails. Es importante notar que mientras esta con su novia pueden llegarle mails por lo que no nos sirve un estado que solo nos diga si esta con su novia, adicionalmente nos debe entregar información acerca de la carga de trabajo acumulada. De acuerdo a esto la cadena de Markov toma la siguiente forma:
- Estamos frente a una cadena finita, por lo que definitivamente existirán probabilidades estacionarias. Las ecuaciones que determinan el valor de las probabilidades estacionarias son las siguientes:



$$\begin{aligned}
\pi_{Of,0} \cdot (\lambda + \delta) &= \pi_{Reto} \cdot \beta + \pi_{Of,1} \cdot \mu + \pi_{P,0} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,1} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,0} \cdot \lambda + \pi_{Of,2} \cdot \mu + \pi_{P,1} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,2} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,1} \cdot \lambda + \pi_{Of,3} \cdot \mu + \pi_{P,2} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,3} \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,2} \cdot \lambda + \pi_{P,3} \cdot \gamma \\
\pi_{P,0} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,0} \cdot \delta \\
\pi_{P,1} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,1} \cdot \delta + \pi_{P,0} \cdot \lambda \\
\pi_{P,2} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,2} \cdot \delta + \pi_{P,1} \cdot \lambda + \pi_E \cdot \mu \\
\pi_{P,3} \cdot \gamma &= \pi_{P,2} \cdot \lambda \\
\pi_E \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,3} \cdot \delta \\
\pi_{Reto} \cdot \beta &= \pi_E \cdot \delta \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

3. Supongamos que estamos durante toda una hora en el estado de reto. La tasa de salida del estado es β , por lo que en términos esperados habrán β retos durante esa hora. Sin embargo dado que no estoy todo el tiempo en ese estado debo ponderar por el tiempo que efectivamente estoy en ese estado. Entonces:

$$E[Retos/hora] = \pi_{Reto} \cdot \beta$$

Otra respuesta valida es suponer que estamos durante una hora en el estado E . Si fuese así habrían δ retos por hora. Entonces análogamente al caso anterior la respuesta sería:

$$E[Retos/hora] = \pi_E \cdot \delta$$

Ambas respuestas son equivalentes (basta revisar las ecuaciones de la parte 2).

4. La respuesta es simplemente

$$\pi_{Of,0}$$

Problema 3

1. Si denotamos $X(t)$ e $Y(t)$ a las cantidades de clientes tipo 1 y tipo 2 respectivamente, en el instante t . Luego $\{[X(t), Y(t)], t \geq 0\}$ es una Cadena de Markov en Tiempo Continuo con las siguientes tasas infinitesimales:

$$\begin{aligned} q[(n, m), (n+1, m)] &= n\lambda r & q[(n, m), (n, m+1)] &= n\lambda(1-r) + \theta \\ q[(n, m), (n-1, m)] &= n\mu & q[(n, m), (n, m-1)] &= m\nu \end{aligned}$$

2. ■ Para encontrar $E[X(t)]$, debemos notar que $\{X(t), t \geq 0\}$ es por sí sola una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Para simplificar notación, se define $M_x(t) = E[X(t)|X(0)]$. Ahora se obtiene una ecuación diferencial satisfecha por $M_x(t)$. Veamos las transiciones entre t y $(t+h)$ y sus respectivas probabilidades, condicional en $X(t)$, con $h \rightsquigarrow 0$

$$X(t+h) = \begin{cases} X(t)+1 & \text{con prob. } \lambda r X(t)h + o(h) \\ X(t)-1 & \text{con prob. } \mu X(t)h + o(h) \\ X(t) & \text{con prob. } 1 - (\lambda r + \mu)X(t)h + o(h) \end{cases}$$

Luego, tomando esperanza se tiene:

$$E[X(t+h)|X(t)] = X(t) + (\lambda r - \mu)X(t)h + o(h)$$

y tomando esperanza nuevamente, se tiene que:

$$M_x(t+h) = M_x(t) + (\lambda r - \mu)M_x(t)h + o(h)$$

Reordenando:

$$\frac{M_x(t+h) - M_x(t)}{h} = (\lambda r - \mu)M_x(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Dado que $h \rightsquigarrow 0$:

$$M'_x(t) = (\lambda r - \mu)M_x(t)$$

De donde se tiene que:

$$M_x(t) = K e^{(\lambda r - \mu)t}$$

Finalmente dado que $M(0) = K = i$:

$$M_x(t) = i e^{(\lambda r - \mu)t}$$

- Para el caso de $Y(t)$ no es posible proceder de la misma manera ya que el proceso también depende de la cantidad de clientes tipo 1 que hay en la cartera de clientes. Sin embargo, se puede calcular una expresión para la esperanza condicionando a ambos procesos, es decir, $M_y(t) = E[Y(t)|X(0), Y(0)]$. Veamos las transiciones entre t y $(t+h)$ y sus respectivas probabilidades, condicional en $X(t)$ e $Y(t)$, con $h \rightsquigarrow 0$

$$Y(t+h) = \begin{cases} Y(t)+1 & \text{con prob. } \lambda(\theta + \lambda(1-r)X(t))h + o(h) \\ Y(t)-1 & \text{con prob. } \nu Y(t)h + o(h) \\ Y(t) & \text{con prob. } 1 - [(\theta + \lambda(1-r)X(t)) + \nu Y(t)]h + o(h) \end{cases}$$

Luego, tomando esperanza se tiene:

$$E[Y(t+h)|X(t), Y(t)] = Y(t) + [\theta + \lambda(1-r)X(t) - \nu Y(t)]h + o(h)$$

y tomando esperanza nuevamente, se tiene que:

$$M_y(t+h) = M_y(t) + [\theta + \lambda(1-r)M_x(t) - \nu M_y(t)]h + o(h)$$

Análogamente al primer caso, reordenando términos, dividiendo por h, y tomando límite con $h \rightsquigarrow 0$:

$$M'_y(t) = \theta + \lambda(1-r)M_x(t) - \nu M_y(t)$$

Pero del primer punto sabemos que:

$$M_x(t) = ie^{(\lambda r - \mu)t}$$

Por lo tanto:

$$M'_y(t) = \theta + \lambda(1-r)ie^{(\lambda r - \mu)t} - \nu M_y(t)$$

Sumando $\nu M_y(t)$ a ambos lados y multiplicando por $e^{\nu t}$, se tiene que:

$$e^{\nu t}[M'_y(t) + \nu M_y(t)] = \theta + \lambda(1-r)ie^{(\lambda r + \nu - \mu)t}$$

Pero el término del lado izquierdo corresponde a la derivada con respecto a t de $e^{\nu t}M_y(t)$, por lo que:

$$\frac{d}{dt}\{e^{\nu t}M_y(t)\} = \theta + \lambda(1-r)ie^{(\lambda r + \nu - \mu)t}$$

Integrando se obtiene que:

$$e^{\nu t}M_y(t) = \theta t + \frac{\lambda(1-r)i}{\lambda r + \nu - \mu} e^{(\lambda r + \nu - \mu)t} + C$$

Evaluyendo en $t=0$, dado que $Y(0) = j$:

$$j = M_y(0) = \frac{\lambda(1-r)i}{\lambda r + \nu - \mu} + C$$

Luego, se tiene que:

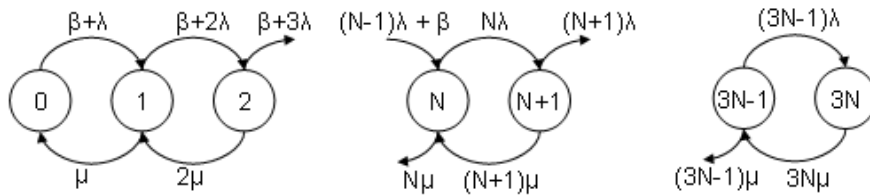
$$C = j - \frac{\lambda(1-r)i}{\lambda r + \nu - \mu}$$

Y finalmente:

$$M_y(t) = [\theta t + j - \frac{\lambda(1-r)i}{\lambda r + \nu - \mu}]e^{-\nu t} + \frac{\lambda(1-r)i}{\lambda r + \nu - \mu} e^{(\lambda r - \mu)t}$$

Problema 4

- De acuerdo al enunciado, la cadena es la que semuestra en la figura.



Respecto a la condición de estacionaridad, estamos frente a una cadena finita, por lo que existirán probabilidades estacionarias (dado que es irreducible)

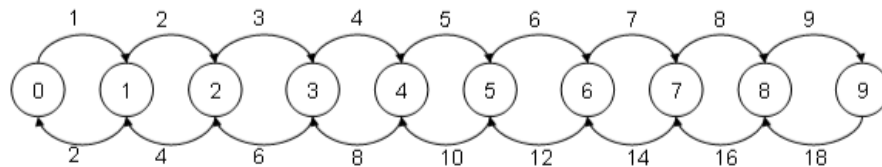
2. Dado que se trata de un proceso de nacimiento y muerte utilizamos las fórmulas conocidas. Entonces, con un poco de desarrollo vemos que:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (\beta + k\lambda)}{i! \mu^i} \cdot \pi_0 & \text{si } 0 < i \leq N \\ \frac{\prod_{k=0}^{N-1} (\beta + k\lambda) \cdot \lambda^{i-N}}{i \cdot (N-1)! \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 & \sim \end{cases}$$

Donde

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (\beta + k\lambda)}{i! \mu^i} + \sum_{i=N+1}^{3N} \frac{\prod_{k=0}^{N-1} (\beta + k\lambda) \cdot \lambda^{i-N}}{i \cdot (N-1)! \cdot \mu^i}}$$

3. En este caso la cadena es la que se muestra en la figura.



Las ecuaciones de estado estacionario son las siguientes:

$$\pi_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \pi_0$$

Entonces:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^9 \frac{1}{2^k}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Conocidas las probabilidades estacionarias vemos que la fracción del tiempo que no pueden ingresar el primer tipo de fanáticos es:

$$\sum_{k=3}^9 \pi_k$$

Dudas y/o errores:
 dsaure@dii.uchile.cl
 shernand@ing.uchile.cl