DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN71L - Modelos Estocásticos
Sem.: Primavera 2004
Prof: Raúl Gouet
P. Aux: D. Sauré, P. Hernández

Clase Auxiliar 7
10 de Septiembre, 2004

Problema 1

A una tienda comercial llegan clientes según un proceso Poisson de tasa λ [clientes/u.t]. La tienda ofrece dos productos: Tipo A y Tipo B. Cada uno de los clientes que llega a la tienda está interesado en un determinado tipo de productos. Específicamente, un cliente cualquiera está interesado en el producto Tipo A con probabilidad q_A y en el producto Tipo B con probabilidad q_B (observe que $q_A + q_B = 1$). Los clientes llegan sin conocer de antemano cuál es el precio del producto correspondiente. Además, cada cliente compra, a lo más, una unidad del producto que desea.

Los clientes son heterogéneos en el sentido que su disposición a pagar por el producto es distinta. Entendemos por disposición a pagar la mayor cantidad de dinero que el cliente estaría dispuesto a pagar por el producto. Desde el punto de vista de la tienda la disposición a pagar d_i de un cliente cualquiera interesado en el producto i es una variable aleatoria con función de densidad $f_i(d_i)$ continua en $[0, \infty)$ y función de distribución $F_i(d_i)$ conocidas. Un cliente compra el producto si su disposición a pagar es mayor o igual que el precio al que la tienda lo vende, siempre que la tienda tenga productos en inventario; en caso contrario se va sin comprar.

El proveedor de la tienda, visita el local a intervalos de tiempo aleatorios que siguen una distribución exponencial de parámetro μ. En cada visita el proveedor ofrece una cantidad Q_A de productos tipo A y Q_B de prductos tipo B, y la política del dueño de la tienda es aceptar la entrega sólo en el caso que no tenga inventario de ninguno de los dos productos.

El costo de cada entrega aceptada es de K[u.m]. Además el costo el costo unitario por unidad de tiempo de mantener inventario es de h_i [u.m], con $i = 1, 2$ respectivamente . Por último, suponga que los precios unitarios de venta por cada producto son P_A y P_B, respectivamente.

1. (0.5 ptos.) ¿Cuál es la distribución de probabilidades de la demanda efectiva por cada producto?. La demanda efectiva está compuesta por los clientes interesados en un producto y con la disposición a pagar suficiente para comprarlo.

2. (1.5 ptos.) Si inicialmente los inventarios de productos son Q_A y Q_B, respectivamente:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que se vendan exactamente k productos tipo B, antes de que se agoten los productos tipo A?.

   b) En función de lo anterior. ¿Cuál es la probabilidad de que los productos tipo A se agoten antes que los productos tipo B?. Denote a esta probabilidad r_{AB}

3. (2.0 ptos.) Considere el comportamiento del sistema descrito en el largo plazo ¿Cuál es el beneficio esperado por unidad de tiempo percibido por la tienda?

4. (2.0 ptos.) Considere que el dueño de la tienda ha decidido dejar de comercializar el producto tipo B. Por este motivo ahora al local, llegarán sólo clientes interesados en el producto tipo A. Por otro

lado, el provedor mantendrá su política de visitas, pero ofrecerá sólo la cantidad de productos Q_A. Bajo esta nueva situación, en el largo plazo ¿Cuál es la fracción esperada de demanda insatisfecha de productos tipo A por unidad de tiempo?

Problema 2

Un hotel opera en un paraje montañoso de elevado atractivo turístico. Cada tarde puede llegar un nuevo cliente solicitando una habitación, lo cual ocurre con probabilidad p, o bien puede no llegar ninguno (con probabilidad $q = 1 - p$). Una fracción α de los clientes se queda en el hotel sólo una noche (llegan una tarde y se van en la mañana siguiente), mientras que una fracción $\beta = 1 - \alpha$, decide quedarse una noche más disfrutando del hermoso paisaje (i.e. llegan una tarde y se van en la mañana del día subsiguiente). Nadie pasa más de 2 noches en el hotel.

1. ¿Cuál es el máximo número de habitaciones que pueden estar ocupadas simultáneamente?
2. Modele el estado de ocupación del hotel para cada noche (cuántas habitaciones están ocupadas) como una cadena de Markov. Defina adecuadamente los estados, e indique las probabilidades de transición entre ellos. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas.

Problema 3

Una unidad productiva de una empresa minera tiene un número muy grande que llamaremos $\mathbf{T}$ mini retro excavadoras para la extracción del mineral. Estas máquinas se utilizan durante el día y al caer la tarde se guardan para ser utilizados en la mañana siguiente.

Sin embargo, existe una probabilidad q que una máquina en operación falle durante un día, independiente de cuántos días consecutivos lleve operando. En estos casos la mini retro excavadora será enviada al taller de reparación al final del día en el que falla, donde su mantenimiento siempre se realiza al día siguiente. De esta manera, una máquina que falla un día t estará lista para su utilización en la mañana del día $t + 2$ independiente de lo que pase con las demás.

1. Justifique porqué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el **Número de mini retro excavadoras buenas al inicio de cada día**. ¿Cuál es la probabilidad que un día fallen i máquinas si esa mañana había j buenas?. Llame a esta probabilidad $s(i, j)$.
2. Modele la situacion descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(i, j)$, clasifique los estados en clases y caracterícelas. Argumente la existencia de una ley de probabilidades estacionarias.

Considere que esta unidad de la mina modifica su política de envío de máquinas a mantención de manera que las enviará al taller sólo en lotes de J máquinas que necesitan reparación. Todas las máquinas enviadas la taller serán reparadas el día siguiente y estarán disponibles en la mañana del día subsiguiente del que fueron enviadas a mantención. La probabilidad que una máquina que está en funcionamiento una mañana cualquiera falle ese día seguirá siendo q.

3. Modele esta nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(i, j)$.

Problema 4

1. En una ciudad el 9 % de los días soleados son seguidos por otro día soleado y el 80 % de los días nublados son seguidos por otro día nublado. Modele este problema como una cadena de Markov.

2. Suponga ahora que el estado del tiempo en un día cualquiera depende del estado del tiempo en los últimos dos días, de la siguiente forma:

   - Si los dos últimos días han sido soleados entonces con una probabilidad de 95 % hoy también estará nublado.
   - Si ayer estuvo nublado y hoy soleado, hay una probabilidad de un 70 % de que mañana esté soleado.
   - Si ayer estuvo soleado y hoy nublado entonces 60 % de las veces mañana estará nublado.
   - Si han pasado dos días con el cielo cubierto de nubes, hay una probabilidad de un 80 % de que las nubes quieran quedarse un día más.

   Con esa información modele el estado del tiempo en la ciudad como una cadena de Markov.