



Clase Auxiliar 2

6 de Agosto, 2004

Problema 1

1. Supongamos que se decide colocar N camas en el hospital. Además consideremos que el día comienza en $t=0$ (7:00 am) y termina en $t=T$ (7:00am del día siguiente) De esta forma, la probabilidad de atender a todos los pacientes graves será:

$$P_N[\text{Lleguen a lo más } N \text{ pacientes graves}] = \sum_{i=0}^N \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!}$$

Donde λ_1 es la tasa de llegada de los pacientes graves (2 al día). Entonces buscamos un N^* tal que:

$$N^* = \inf \left\{ N | N \in \{0, 1, \dots\} \quad \wedge \quad \sum_{i=0}^{N^*} \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!} \geq 0,95 \right\}$$

2. El paciente morirá o no dependiendo del instante en que llego. Si llego antes de las $t = 5$ (desde ahora en adelante trabajaremos en minutos) entonces muere con probabilidad 1 (del enunciado). Si llego después de las $t = 5$ sobrevive. Ahora Supongamos que el tipo llego en el instante X ($0 \leq X \leq 60$) Entonces:

$$P[\text{Muerto} | \text{Llego en } X] = 1_{X \leq 5}$$

Si embargo debemos descondicionar. Para esto vemos que la distribución condicional de las llegadas de poisson hasta un instante t se distribuyen uniformemente entre 0 y T . Entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} P[\text{Muerto}] &= \int_0^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \int_0^5 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \int_0^5 1 \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 0 \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

3. Esto es básicamente es la probabilidad que lleguen 5 pacientes graves seguidos de 5 pacientes leves. Sin embargo dado que:

$$P[\text{Llegue un paciente grave antes que uno leve}] = \frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}$$

donde λ_2 es la tasa de llegada de pacientes leves al consultorio, y considerando la propiedad de perdida de memoria de la distribución exponencial, tendremos que la probabilidad que busquemos, P , es:

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}^5 \cdot \frac{\lambda_l}{\lambda_g + \lambda_l}^5$$

4. Por la perdida de memoria de la exponencial el mundo comenzando el tipo inicia su ida al bao. Por otro lado, debido a la suma de procesos de poisson, el proceso de llegada de pacientes al consultorio será en si un proceso de poisson de tasa $\lambda_g + \lambda_l$, y por lo tanto Y , el tiempo de llegada entre clientes, seguirá una distribución exponencial de parámetro $\lambda_g + \lambda_l$. Entonces el tiempo máximo, T^* , de demora debe ser tal que :

$$P[Y \geq T^*] = e^{-(\lambda_g + \lambda_l) \cdot T^*} = 0,95$$

Entonces:

$$T^* = -\frac{\ln(0,95)}{\lambda_g + \lambda_l}$$

Problema 2

1. Para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 6 ultimos 6 goles debe ser superior a B (notar que la probabilidad de ver el primer gol es 1). Sean x_i = tiempo entre el gol $i-1$ -esimo y el i -esimo. Entonces:

$$P(\text{ver los 7 primeros goles}) = P(x_2 > B, x_3 > B, \dots, x_6 > B, x_7 > B) = (e^{-\lambda B})^6 = e^{-6\lambda B}$$

2. Sea Y_i el tiempo transcurrido entre el $i-1$ -esimo gol observado y el i -esimo gol observado. De esta manera tenemos que:

- $Y_1 \rightarrow \exp(\lambda)$
- $Y_i \rightarrow \exp(\lambda) \forall i \neq 1$

Entonces sea S_N el tiempo en que vemos el N -esimo gol.

$$S_n = \sum_{i=1}^N Y_i \Rightarrow S_N - (N-1)B \rightarrow \text{Gamma}(N, \lambda)$$

De lo anterior, y sabiendo que $P(S_N \leq t) = P(R(T) \geq N)^1$ se concluye que:

$$P(R(T) \geq N) = \int_0^{t-(n-1)B} \frac{\lambda^N \cdot t^{N-1} \cdot e^{-\lambda t} \partial t}{(n-1)!}$$

¹Identidad valida para cualquier proceso de conteo

Problema 3

1. a) Sea t_i el instante de la llegada del i -ésimo pasajero antes de la llegada del siguiente tren.

Luego la esperanza pedida corresponde a: $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - t_i)\right]$

Dado que esta esperanza depende de la variable aleatoria $N(t)$ que representa la cantidad de personas que llegan hasta el instante t , se debe condicionar con respecto a esta variable y luego descondicionar. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_i^{N(t)} (t - t_i)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - t_i) / N(t) = n\right] \cdot P[N(t) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} t / N(t) = n\right] - E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} t_i / N(t) = n\right] \right] \cdot P[N(t) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{N(t)} E[t / N(t) = n] - \sum_{i=1}^{N(t)} E[t_i / N(t) = n] \right] \cdot P[N(t) = n] \end{aligned}$$

En la expresión anterior t es una constante por lo que $E[t] = t$. Por otro lado los tiempos t_i se distribuyen uniformes en el intervalo $[0, t]$ cuya esperanza es $E[t_i] = \frac{t}{2}$. Finalmente el término $P[N(t) = n]$ corresponde a la definición de un proceso de Poisson.

$$E\left[\sum_i^{N(t)} (t - t_i)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[nt - \frac{nt}{2} \right] \cdot \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{t}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{\lambda t^2}{2}$$

- b) En la parte 1 se calculó la esperanza pedida dado un tiempo entre trenes conocido igual a t . Dado que los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ [trenes/hora], el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial de parámetro μ . Luego descondicionando el resultados de la parte anterior, se tiene que la esperanza pedida es:

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda t^2}{2} \mu e^{-\mu t} dt$$

2. Sea $N_{ij}(t)$ el número de autos que vienen de la calle i y toman la calle j , hasta el instante t . Por la propiedad de división de Poisson $N_{ij}(t)$ es también un Proceso de Poisson con tasa $\lambda_i P_{ij}$ y todos los $N_{ij}(t)$ son independientes. Luego, se tiene que:

$$B_j(t) = \sum_i N_{ij}(t)$$

Por lo propiedad de composición de Poisson la variable $B_j(t)$ es Proceso de Poisson con tasa $\sum_i \lambda_i P_{ij}$:

$$P[B_j(t) = k] = \frac{(\sum_i \lambda_i P_{ij} t)^k e^{-\sum_i \lambda_i P_{ij} t}}{k!} \quad E[B_j(t)] = \sum_i \lambda_i P_{ij} t$$

3. Sea $N(t)$ la cantidad de clientes que han llegado al banco hasta el instante t . Dado que se registraron 2 llegadas en un hora de operación, el instante de cada una de esas llegadas se distribuye Uniforme en el intervalo de una hora. Luego:

$$a) \quad P[N(\frac{1}{3}) = 2/N(1) = 2] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$b) \quad 2 \cdot P[N(\frac{1}{3}) = 1/N(1) = 2] + P[N(\frac{1}{3}) = 2/N(1) = 2] = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

4. Dado que la cantidad de personas de cada grupo es constante e igual a T , el proceso de llegada de turistas es un proceso de Poisson de tasa T . Si definimos L como el número de turistas necesarios para tener al menos uno de cada nacionalidad y queremos calcular su valor esperado se tiene que:

$$E(L) = \int_0^\infty (1 - F_L(u)) du$$

Debemos encontrar una expresión para $F_L(u) = P[X = \max\{X_1, X_2, \dots, X_N\} < u]$, donde los $X_i \rightsquigarrow \exp(T \cdot p_i)$ representan el tiempo hasta que llega la primera persona de la nacionalidad i

$$\begin{aligned} P[X < u] &= (P[X_1 < u] \cdot P[X_2 < u] \dots \cdot P[X_N < u]) \\ &= \prod_{i=1}^N F_{X_i}(u) \\ &= \prod_{i=1}^N (1 - e^{-T p_i \cdot u}) \end{aligned}$$

Dado que la pregunta es por el valor esperado del número grupos de turistas que visitarán el museo hasta que el libro de visitas tenga al menos una persona de cada país y en cada grupo vienen T personas se tiene que $E[G] = \frac{E[L]}{T}$.

Problema 4

El problema puede ser visto como una división de un proceso de Poisson. Sean:

- $N(t)$ = número de personas que han llegado a comprar entradas desde 0 hasta t .
 $N_n(t)$ = número de personas que han llegado a comprar entradas sin ser socios desde 0 hasta t .
 $N_m(t)$ = número de personas que han llegado a comprar entradas siendo socios desde 0 hasta t .

1.

$$\begin{aligned} P(N_m(6) = i | N(6) = n) &= \frac{P(N_m(6) = i \wedge N(6) = n)}{P(N(6) = n)} \\ &= \frac{P(N_m(6) = i) P(N_n(6) = n - i)}{P(N(6) = n)} \\ &= \frac{\frac{(0,25\lambda 6)^i e^{-0,25\lambda 6}}{i!} \frac{(0,75\lambda 6)^{n-i} e^{-0,75\lambda 6}}{(n-i)!}}{\frac{(\lambda 6)^n e^{-\lambda 6}}{n!}} \\ &= \binom{n}{i} 0,25^i 0,75^{n-i} \end{aligned}$$

2. Distinguimos 3 casos:

- Si $n < 200 \Rightarrow P(\text{vender } n) = \frac{(\lambda 6)^n e^{-\lambda 6}}{n!}$
- Si $n = 200 \Rightarrow P(\text{vender } n) = \sum_{k=200}^{\infty} \frac{(\lambda 6)^k e^{-\lambda 6}}{k!}$
- Si $n > 200 \Rightarrow P(\text{vender } n) = 0$

3. Sea u = utilidad de una función. Entonces:

$$E(u) = \sum_{k=0}^{\infty} E(u|N(6) = k)P(N(6) = k)$$

pero:

- Si $k \leq 199$

$$E(u|N(6) = k) = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} 0,25^i 0,75^{k-i} ((k-i)p + i0,8p)$$

- si $k \geq 200$

$$E(u|N(6) = k) = \sum_{i=1}^k \binom{200}{i} 0,25^i 0,75^{200-i} ((200-i)p + i0,8p)$$

Como $P(N(6) = k) = \frac{(\lambda 6)^k e^{-\lambda 6}}{k!}$, sólo basta reemplazar.

Denis Sauré
dsaure@dii.uchile.cl

Patricio Hernández
shernand@ing.uchile.cl