U N I V E R S I D A D   D E   C H I L E
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Civil Industrial
IN56A 01
Prof: V. Fernández

MÁS SOBRE FUTUROS, OPCIONES Y SWAPS

I RELACIÓN ENTRE LOS PRECIOS FUTUROS Y *FORWARDS*

Proposición: "Si las tasas de interés son determinísticas, los precios de un contrato futuro y de un contrato *forward* escritos bajo las mismas condiciones son iguales".

Demostración. Consideremos el caso en que las tasas de interés son determinísticas y constantes. Sea $\hat{F}_0$ y F_o los precios de un *forward* y de un futuro, respectivamente.

- La ganancia (pérdida) en T de un *forward* que madura en T, como función del activo subyacente, en el momento de maduración, S_T, es $S_T - \hat{F}_0$ (posición larga[1]).

[1] La demostración para una posición corta es análoga.

- Nuestra estrategia consiste en entrar en un cierto número de contratos futuros cada día y depositar la ganancia obtenida (o, pedir prestado si obtenemos pérdidas) a la tasa libre de riesgo hasta la fecha de expiración del futuro, T. Escogemos el número de contratos de modo tal que la cantidad que tenemos en el banco en T depende sólo del precio del futuro en dicho día, y no del momento en el cual la transacción tuvo lugar. Los flujos generados por esta estrategia son:

Día	# contratos	Precio	Ganancia diaria	Factor de valor futuro	Ganancia (pérdida) en T
0		F_0			
1	$e^{-r(T-1)}$	$\tilde{F}_1$	$e^{-r(T-1)}(\tilde{F}_1 - F_0)$	$e^{r(T-1)}$	$\tilde{F}_1 - F_0$
2	$e^{-r(T-2)}$	$\tilde{F}_2$	$e^{-r(T-2)}(\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1)$	$e^{r(T-2)}$	$\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1$
3	$e^{-r(T-3)}$	$\tilde{F}_3$	$e^{-r(T-3)}(\tilde{F}_3 - \tilde{F}_2)$	$e^{r(T-3)}$	$\tilde{F}_3 - \tilde{F}_2$
....	....	....	....	....	....
T–1	e^{-r}	$\tilde{F}_{T-1}$	$e^{-r}(\tilde{F}_{T-1} - \tilde{F}_{T-2})$	e^{r}	$\tilde{F}_{T-1} - \tilde{F}_{T-2}$
T	1	$\tilde{F}_T$	$\tilde{F}_T - \tilde{F}_{T-1}$	1	$\tilde{F}_T - \tilde{F}_{T-1}$
Total					$\tilde{F}_T - F_0$

El número de contratos es aquel que debiera ser comprado al final del día anterior (esto es, el día 1 indica el final del día cero). Dado que el tiempo es medido en días, la tasa de interés, r, debe ser diaria, compuesta continuamente.

- La estrategia anterior rinde $\tilde{F}_T - F_0 = S_T - F_0$ en T, dado que el precio futuro coincide con el *spot* al momento de la expiración del contrato (esto es, $S_T = \tilde{F}_T$). Dado que la ganancia (pérdida) del *forward* en el momento de expiración es $S_T - \hat{F}_0$, debe el caso que $\hat{F}_0 = F_0$. De lo contrario:

❖ -si $\hat{F}_0 > F_0$, llevamos a cabo la estrategia descrita en la tabla anterior y tomamos una posición corta en un contrato *forward* para entrega en T. Esto nos proporciona una ganancia libre de riesgo en T de $(S_T - F_0) - (S_T - \hat{F}_0) = \hat{F}_0 - F_0 > 0$. Análogamente,

❖ -si $\hat{F}_0 < F_0$, tomamos una posición larga en un *forward* para T combinada con una posición corta en la estrategia descrita más arriba. En T obtenemos una ganancia libre de riesgo igual a $(S_T - \hat{F}_0) - (S_T - F_0) = F_0 - \hat{F}_0 > 0$.

Por lo tanto, a fin de que exista un equilibrio, debe cumplirse que $F_0 = \hat{F}_0$ ♦

Observaciones a la Demostración

- Si la tasa de interés es determinística pero varía a través del tiempo, esta demostración sigue siendo válida. Lo que cambia en dicho caso es el número de contratos y el factor de valor futuro.

- La existencia de costos de manutención o dividendos no afecta nuestra demostración puesto que el precio *spot* no es una variable relevante en la demostración.

II SEMEJANZAS Y DIFERENCIAS ENTRE LOS CONTRATO FORWARD Y FUTUROS

- Demostramos que, cuando las tasas de interés son determinísticas, el precio *forward* es igual al precio futuro (para el mismo vencimiento y activo subyacente). La diferencia entre los dos tipos de contratos aparece después de la iniciación. El valor de mercado de ambos contratos fluctúa con el precio *spot* del activo subyacente. Un contrato *forward* es, sin embargo, menos sensible con respecto a cambios en el precio *spot*.

- El valor de un contrato *forward* después de la iniciación puede ser calculado comparando los siguientes portafolios:

  - ❖ -Tomar una posición larga en un *forward* con precio de ejercicio igual a K

  - ❖ -Comprar una acción a S_t y pedir prestado $Ke^{-r(T--t)}$ hoy día, t.

Dado que ambos portafolios producen una ganancia (pérdida) de $S_T - K$ en T, deben tener el mismo costo en t. Esto significa que el **valor de un *forward* en t** es:

$$\hat{f}_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

- De la ecuación anterior, vemos que la sensibilidad de un contrato *forward* con respecto al precio spot, S_t, está dado por:

$$\frac{\ddot{A}\hat{f}_t}{\ddot{A}S_t} \approx \frac{\partial \hat{f}_t}{\partial S_t} = 1$$

Es decir, por cada aumento (caída) de $1 en el precio *spot* del activo subyacente, el valor del *forward* aumenta (cae) en $1.

- Debemos recordar que el precio futuro es ajustado con las fluctuaciones de los precios de mercado en una base diaria. Cada día, el precio de entrega del contrato es el precio de cierre del futuro al final del día anterior, F_{t-1}. Por lo tanto, si dentro de un día el precio futuro fluctúa a F_t, el **valor corriente del contrato**, $\mathbf{f_t}$**,** es igual a $F_t - F_{t-1}$ (posición larga):

$$f_t = F_t - F_{t-1} = S_t\, e^{r(T-t)} - F_{t-1}$$

De lo anterior:

$$\frac{\ddot{A}f_t}{\ddot{A}S_t} = \frac{\Delta F_t}{\Delta S_t} \approx \frac{\partial F_t}{\partial S_t} = \frac{\partial (S_t e^{r(T-t)})}{\partial S_t} = e^r(T-t) > 1$$

En consecuencia, vemos que después de la iniciación del contrato, un **futuro es más volátil** que un *forward* con el mismo vencimiento y escrito sobre el mismo activo subyacente.

III PARIDAD PUT-CALL

a) Para **opciones europeas** en acciones que no pagan dividendos tenemos la llamada **paridad *put-call***:

$$\boxed{S(t) = c(S, K, t, T) - p(S, K, t, T) + KB(T, t)}$$

Demostración: En T, c – p + KB(T,T) =max(S(T)–K, 0)–max(K–S(T), 0)+K=S(T). De lo anterior, deducimos que podemos formar una posición sintética en una acción adquiriendo una posición larga en una *call*, una posición corta en una *put* más un depósito de $KB(T, t). Dado que en T, el portafolio y la acción valen lo mismo, debe ser el caso que c(S, K, t, T) – p(S, K, t, T) + KB(T, t)=S(t) ♦

En el caso de **opciones americanas**, tenemos la siguiente paridad *put-call*:

$$\boxed{S(t)-K \leq C(S, K, t, T)-P(S, K, t, T) \leq S(t)-KB(t, T)}$$

Dado que las opciones americanas pueden ser ejercidas antes de su vencimiento, es interesante demostrar lo anterior. Supongamos primero que C–P>S–KB. En dicho caso, podemos realizar las siguientes transacciones para asegurarnos una ganancia libre de riesgo hoy día:

Transacción	**Flujo inicial (t)**	**Flujo final (T)**	
		S(T)£K	**S(T)>K**
Emitir 1 *call*	C	0	–(S(T)–K)
Comprar una *put*	–P	K–S(T)	0
Comprar una acción	–S	S(T)	S(T)
Pedir prestado KB	KB	–K	–K
Total	C–P–(S–KB)>0	0	0

Por lo tanto, debe ser el caso que C–P<S–KB hoy día. ¿Qué pasa si la *call* americana que emitimos es ejercida antes de su vencimiento? Sea t′ la fecha en que la *call* es ejercida, con t<t′<T:

Transacción	**Flujo**
Call ejercida	$-S(t')+K$
Vender la acción	$S(t')$
Pagar el préstamo	$-Ke^{-r(T-t)}e^{r(t'-t)} = -Ke^{-r(T-t')}$
Total	$K(1-e^{-r(T-t')})\geq 0$

Potenciales beneficios: mantener la *put*. Supongamos ahora que C–P<S–K:

Transacción	**Flujo inicial (t)**	**Flujo final (T)**	
		S(T)£K	**S(T)>K**
Comprar 1 *call*	–C	0	S(T)–K
Escribir una *put*	P	–(K–S(T))	0
Vender una acción	S	–S(T)	–S(T)
Prestar K	–K	$Ke^{r(T-t)}$	$Ke^{r(T-t)}$
Total	S–K–(C–P)>0	$K(e^{r(T-t)}-1)\geq 0$	$K(e^{r(T-t)}-1)\geq 0$

Dado que esta no es una situación de equilibrio, debe cumplirse que C–P≥S–K. Si la *put* que escribimos es ejercida antes de su vencimiento, cerramos nuestra posición corta en la acción y recuperamos el préstamo. Podemos obtener una ganancia adicional por concepto de la posición larga en la *call*.

IV EJERCICIO OPTIMO DE *CALLS* Y *PUTS* AMERICANAS

a) *Calls*:

1) Si ejercemos la *call* temprano, pagamos $K por la acción en vez de $K en el futuro. Es decir, desperdiciamos el interés ganado sobre $K.

2) Al ejercer una *call* americana hoy día, pagamos $K por una acción que hoy vale S(t)>K, pero que potencialmente podría valer menos en el futuro. El precio corriente de la acción refleja todas las posibilidades de precios futuros altos y bajos. Es decir, al retrasar el ejercicio de la opción preservamos el derecho a no ejercer.

3) Sin embargo, al ejercer la *call* hoy día (t) en vez de en t′, tenemos la acción entre t y t′. Si se pagan dividendos en dicho período, los recolectamos.

En resumen, **si ejercemos la *call* americana hoy**:

- ❖ Ganamos el valor presente (VP) de todos los dividendos pagados entre t y t′.
- ❖ Perdemos el derecho a no ejercer y el interés sobre K entre t y t′, K–KB(t, t´).

Puts

1) Al ejercer la *put* hoy día, vendemos en $K una acción que vale $S(t)<K$, pero que podría valer más en el futuro. Si esperamos hasta el vencimiento del contrato, vendemos sólo si $S(T)<K$. Por lo tanto, al postergar el ejercicio, preservamos el valor del derecho a no ejercer.

2) Sin embargo, al ejercer la *put* hoy día recibimos $K por la acción en vez de $K en el futuro. Es decir, ganamos el interés sobre $K. Por otra parte, al ejercer la *put* en t en vez de en t′, perdemos cualquier dividendo entregado en dicho período porque ya no poseemos la acción.

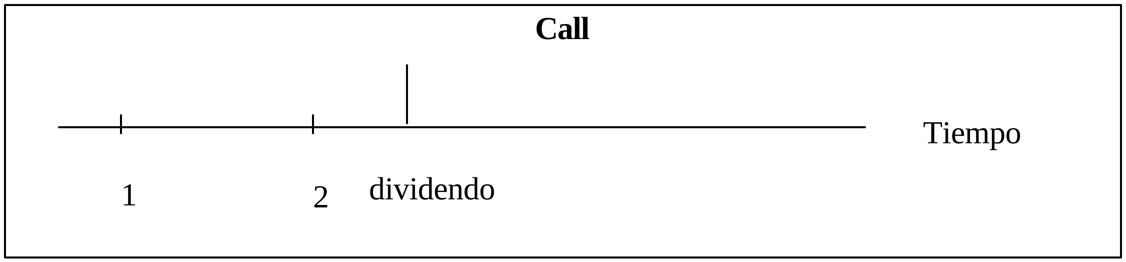
En resumen, si ejercemos la *put* americana hoy:

- Ganamos el interés sobre $K, $K–B(t, t′)K.

- Perdemos el valor del derecho a no ejercer y el VP de todos los dividendos pagados entre t y t′.

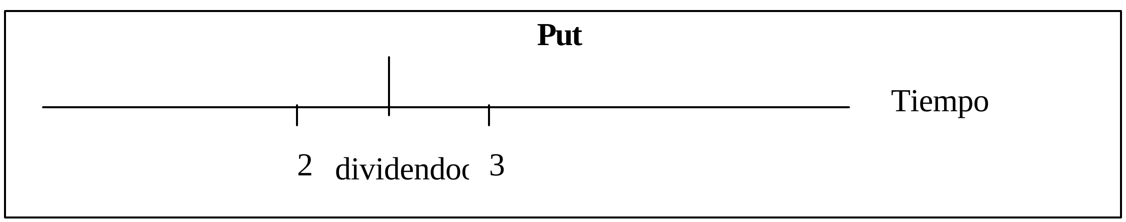
De lo anterior, deducimos que:

1) Es óptimo ejercer una *call* en la fecha de maduración o justo antes de la entrega de un dividendo.



No es óptimo ejercer en 1, y siempre es óptimo ejercer en 2 ó en la fecha de maduración. La razón es que de otra forma perdemos el interés sobre K y el derecho a no ejercer, pero sólo ganamos el valor presente del dividendo, el cual es pequeño.

2) Nunca es óptimo ejercer una *put* justo antes de la entrega de un dividendo.



Si ejercemos la *put* en 2, perdemos el dividendo y el derecho a no ejercer la opción, y ganamos sólo el interés entre t=2 y t=3 (pequeño). Por lo tanto, es mejor ejercer en 3 que en 2.

IV EJEMPLOS DE FUTUROS Y OPCIONES

(1) La acción de la empresa "XYZ" se transa en \$100. (Se sabe que no se repartirán dividendos en los próximos seis meses). La tasa de interés libre de riesgo anualizada, compuesta continuamente, es 4%. El precio corriente futuro/*forward* a seis meses es \$102,02. Si después de la iniciación del contrato, el precio de la acción aumenta en \$1. ¿Cuál es el **valor** de los contratos *forward* y futuro a seis meses?

Solución Sabemos que el valor del contrato *forward* aumenta en \$1, esto es, en ΔS_t. En tanto, el valor del contrato futuro aumenta en $F(101;0,5)–F(100;0,5)=(101–102)e^{0,04x0,5}=\$1,02>\$1$.

(2) Suponga un contrato futuro escrito sobre una acción que se transa a \$215 hoy día. Asuma que dicha acción entrega una tasa de dividendo continuo de 3% anual. Suponga que la tasa de interés libre de riesgo anualizada, compuesta continuamente es 7%.

(a) Encuentre el precio de ejercicio de un futuro para un contrato a dos meses.

(b) Calcule la ganancia que usted obtendrá al final del día en el contrato futuro si el precio de la acción aumenta a \$217.

(c) Derive el precio de ejercicio de un *forward* para un contrato *forward* a seis meses para la misma acción, iniciado hoy día.

(d) Calcule el valor del contrato *forward* al final del día, dado que el precio de la acción sube a \$217.

(e) De sus cálculos anteriores, explique cómo usted podría formar un contrato *forward* sintético a seis meses usando contratos futuros a dos meses hoy día. No explique cómo modificaría su posición mañana. (*Hint*: Usted desea ganar la misma cantidad de dinero con la posición sintética que con aquella del contrato a futuro al final del día).

Solución

a) K futuro = $215e^{(0.07-0.03) \times 2/12}$= \$216.438

b) K'futuro =$217e^{(0.07-0.03) \times 2/12}$= \$218.451

Por lo tanto, la ganancia que usted obtiene es \$2.013.

c) K *forward*=$217e^{(0.07-0.03) \times 6/12}$= \$219.34

d) Valor *forward*=$S(t)e^{-q \times 6/12}$–K *forward* $e^{-r \times 6/12}$

donde S(t)=217, q=3%, K*forward*=219.34, y r=7%. Reemplazando términos, obtenemos que el valor del *forward* \$1.974.

e) Necesitamos 1.974/2.013=0.981 contratos futuros a dos meses a fin de formar un *forward* sintético a 6 meses hoy.

(3) Intel se transa en $50 hoy día. Se sabe que en cada uno de los dos próximos meses, el precio de Intel subirá en 25% o caerá en 20%. La tasa de interés simple mensual es 1%. Además, se sabe que en un mes más Intel pagará un dividendo el cual será igual al 10% del precio de la acción en ese momento. Por ejemplo, si el precio de Intel es $30 de aquí a un mes, el dividendo será igual a $3.

(a) Derive un modelo binomial de dos períodos para el precio de Intel (esto es, use un mes para cada rama del árbol). Encuentre u, d, r y p.

(b) Use el método binomial para encontrar el precio de una *put* americana en la acción de Intel a dos meses con K=50.

Solución

(a) $u=1.25$, $d=0.8$, $r^*=1+0.01=1.01$, y $p=(r-d)/(u-d)=0.4667$

Arbol para el precio de Intel:

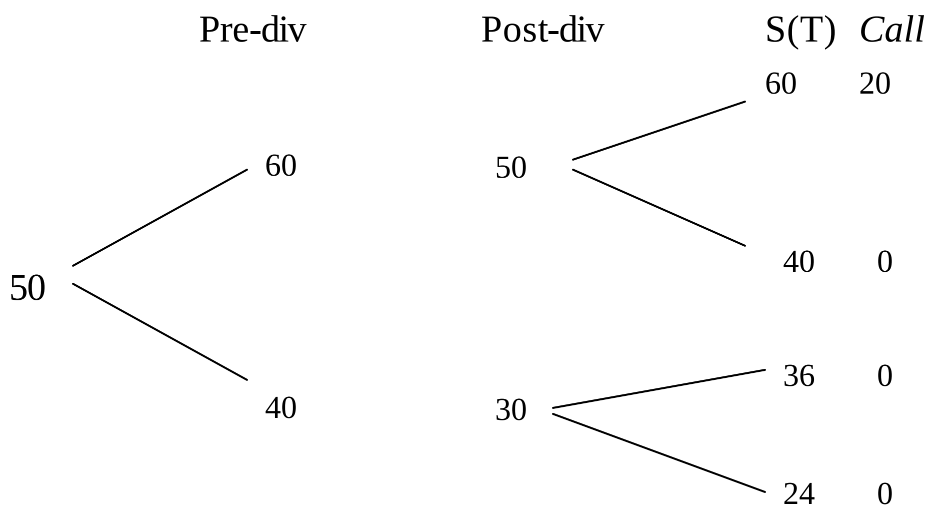
t=0	t=1 Pre div	t=1 Post div	t=2
			70.31
	62.5	56.25	
50			45
	40	36	
			28.8

(b) Arbol para la *put* americana con K=50

t=0	t=1 Pre div	t=1 Post div	t=2
			0
		2.640*	
8.613		-6.25(e)	
			5
		13.505	
		14(e)*	
			21.2

donde (e) denota ejercicio temprano, y * la estrategia óptima a llevar a cabo en cada nodo (esto es, ejercer o esperar).

4) Consideremos la acción de la empresa XYZ que se está transando en $50. La acción pagará un dividendo de $10 en un mes. El precio de la acción sube o baja en un 20% cada mes. La tasa de interés simple libre de riesgo es 10%. ¿Cuál es el precio de una *call* europea con un precio de ejercicio de $40 si expira en dos meses?

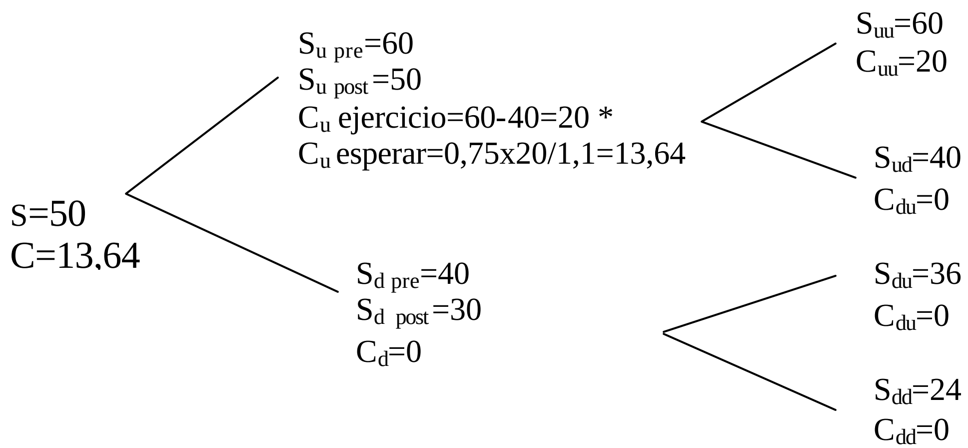


En este caso, r*=1,1, u=1,2, d=0,8.

$$p = \frac{r^* - d}{u - d} = 0{,}75 \qquad\qquad C = \frac{p^2 C_{uu}}{r^2} = \frac{0{,}75^2 . 20}{1{,}1^2} = 9{,}30.$$

Notemos que en este caso el árbol binomial no se recombina.

Consideremos una *call* americana en la misma acción del ejemplo anterior. El siguiente árbol ilustra la decisión óptima en cada nodo. El (*) denota que es óptimo ejercer la opción antes de su vencimiento. Recordemos que **sólo en la presencia de dividendos puede ser óptimo el ejercicio temprano de una *call* americana**:



donde C=13,64=0,75 x 20/1,1.

V SWAPS

Un *swap* o permuta es un contrato financiero privado entre dos partes—típicamente, dos compañías—que intercambian flujos de caja futuros de acuerdo a una fórmula preestablecida. Los *swaps* tuvieron su origen en los préstamos paralelos y subsidiarios surgidos durante la década de los 70's como consecuencia de los controles cambiarios existentes en la mayoría de los países. Estos no sólo limitaban las oportunidades de financiamiento en el extranjero para las compañías locales, sino que dificultaban la inversión de nacionales en el extranjero. Los primeros contratos *swaps* fueron negociados al comienzo de la década de los 80's. En la actualidad, cientos de billones de dólares en contratos son negociados cada año.

❖ *Swaps* en Tasas de Interés: *Swap* "Vainilla Simple"

- En un *swap* en tasa de interés, la parte A paga a la parte B interés a tasa fija sobre un principal P (nocional) por un número fijo de años. La parte B, a su vez, paga a la parte A interés a una tasa flotante sobre el principal P por un número fijo de años.

- ¿Por qué dos firmas entrarían en un *swap*? Si B tiene una ventaja comparativa en pedir prestado a una tasa flotante y A tiene una ventaja comparativa pidiendo prestado a una tasa fija, entonces hay una ganancia neta para cada parte de pedir prestado a la tasa en la cual se tiene ventaja comparativa y después intercambiar los pagos del préstamo.

- Al igual que los contratos *forward*, los contratos *swap* normalmente tienen un valor de cero en el momento de la iniciación.

Ejemplo

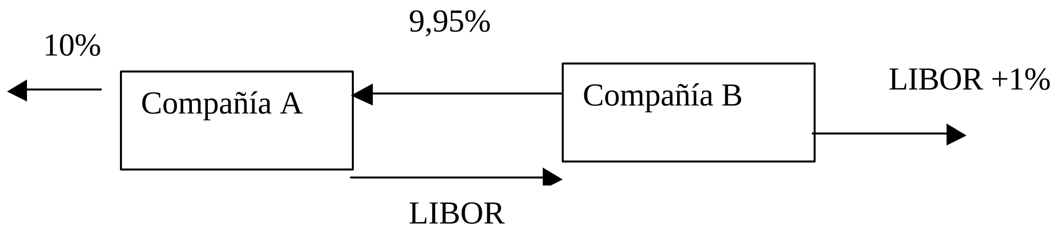
Si A y B tienen las siguientes tasas disponibles:

	Fija	Variable (flotante)
Firma A	10%	LIBOR a seis meses +0,3%
Firma B	11,2%	LIBOR a seis meses +1%

A tiene una **ventaja absoluta** en ambos mercados (enfrenta menores tasas fijas y flotantes). Ahora, dado que A paga 1,12% menos en tasa fija pero sólo 0,7% menos en tasa variable, A tiene una **ventaja comparativa** en el mercado de **tasa fija**. En consecuencia, B tiene una ventaja comparativa en el mercado de tasa flotante. El tamaño de la tasa comparativa es 0,5%:

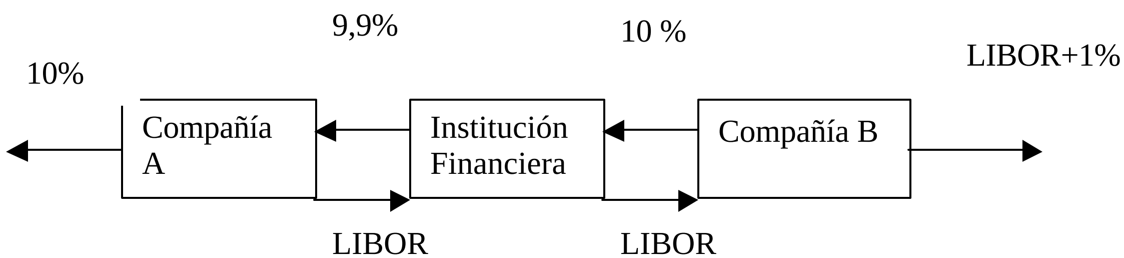
(tasa fija B–tasa fija A)–(tasa flotante B– tasa flotante A)=1,2–0,7=0,5%

Si A desea pedir prestado $10 millones a la tasa flotante y B desea pedir prestado $10 millones a la tasa fija, ¿cómo puede cada una de las partes pedir prestado en el mercado en el cual tiene ventaja comparativa y después llevar a cabo un *swap* ventajoso?



A paga LIBOR +0,05%, es decir, 0,25% **menos** que lo que pagaría pidiendo prestado directamente a la tasa flotante. B paga 10,95% en tasa fija, es decir, 0,25% **menos** de lo que pagaría pidiendo prestado directamente a la tasa fija. La ganancia neta de las dos partes es 0,50%, es decir, 50 puntos base, la que es igual al tamaño de la ventaja comparativa.

- Generalmente, una institución financiera actúa como intermediario entre las firmas:



La institución financiera gana 0,1% (10 puntos base) y cada uno de las dos firmas obtiene una reducción de 0,2 % (20 puntos base) en su tasa. Si una de las empresas no paga, la institución financiera aún tiene que respetar su acuerdo con la otra empresa. El *spread* de 10 puntos base ganado por la institución financiera es para compensar, en parte, el riesgo de no pago que sobrelleva.