



UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN56A 01
Prof: Viviana Fernández

INTERES COMPUESTO

- Considere una cantidad A invertida n años a una tasa de r por año. Si la tasa se compone una vez al año, el valor terminal de la inversión es:

$$A(1 + r)^n$$

- Si la tasa de interés se compone m veces por año, el valor terminal de la inversión es:

$$A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$$

Ejemplo 1. Suponga que $A=\$100$, $r=10\%$ por año, y $n=1$ (un año). Si la tasa se compone una vez por año ($m=1$), los \$100 aumentan a:

$$\$100 * 1.1 = \$110.$$

Si la tasa se compusiera 2 veces al año ($m=2$), ganaríamos 5% por semestre, con el interés siendo reinvertido. Los \$100 aumentarían a:

$$\$100 * 1.05 * 1.05 = \$110.25$$

La siguiente tabla muestra el efecto de aumentar la frecuencia con la cual se compone la tasa:

Frecuencia de composición	Valor de \$100 al final de 1 año
Anual ($m=1$)	110.00
Semestral ($m=2$)	110.25
Trimestral ($m=4$)	110.38
Mensual ($m=12$)	110.47
Semanal ($m=52$)	110.51
Diario ($m=365$)	110.52

- El límite, a medida que $m \rightarrow \infty$, se conoce como **interés compuesto continuamente**. Se puede demostrar que la cantidad A invertida durante n años a la tasa r aumenta a:

$$A e^{r * n}$$

- En el ejemplo de la tabla anterior, $A=100$, $n=1$ y $r=0.1$, de modo que con interés compuesto continuamente A aumenta a:

$$100 e^{0.1} = 110.52$$

- Notemos que el valor anterior es aproximadamente igual que el valor obtenido con interés compuesto diariamente. Para todos efectos prácticos, el interés compuesto continuamente puede ser considerado como interés compuesto diariamente.
- Componer a una suma de dinero a la tasa de interés compuesta continuamente por n años involucra multiplicarla por e^{r*n} . En tanto, descontarla a la tasa de interés compuesta continuamente por n años involucra multiplicarla por $e^{-r * n}$.

- Supongamos que r_c es la tasa de interés compuesta continuamente y r_m es la tasa equivalente compuesta m veces al año. Debe ser caso que:

$$Ae^{r_c * n} = A \left(1 + \frac{r_m}{m} \right)^{mn} \quad \Leftrightarrow \quad e^{r_c * n} = \left(1 + \frac{r_m}{m} \right)^{mn}$$

Esto implica que:

$$r_c = m \ln \left(1 + \frac{r_m}{m} \right)$$

$$r_m = m(e^{r_c/m} - 1)$$

- Estas ecuaciones pueden ser usadas para convertir una tasa compuesta con frecuencia de m veces por año a una tasa compuesta continuamente, y viceversa.

Ejemplo 2. Considere una tasa de 10% compuesta semestralmente. Esto es, $m=2$, $r_m=0.1$. La tasa equivalente con interés compuesto continuamente es:

$$2 \ln(1+0.05)=0.09758$$

o 9.758% anual.

Ejemplo 3. Suponga que la tasa de interés de un crédito es 8% anual, compuesta continuamente. ¿Cuál es la tasa equivalente, compuesta trimestralmente?

$$4(e^{0.02} - 1) = 0.0808 \quad \Rightarrow \quad 8.08\% \text{ anual.}$$

Si el préstamo es de \$100, entonces el pago de intereses será de \$2.02 por trimestre ♦

❖ Por último, notemos que una tasa compuesta **m_1 veces por año** puede ser convertida a una tasa compuesta **m_2 veces por año**:

$$A \left(1 + \frac{r_{m_1}}{m_1} \right)^{m_1 n} = A \left(1 + \frac{r_{m_2}}{m_2} \right)^{m_2 n}$$

esto es,

$$r_{m_2} = \left[\left(1 + \frac{r_{m_1}}{m_1} \right)^{m_1 / m_2} - 1 \right] m_2$$