



## Ejemplos Programación Dinámica Estocástica

### Problema 1

Suponga que ud. sale de su casa a comprar un medicamento, para una persona a la cual quiere mucho, y desea volver en el mínimo tiempo posible. Si no lo compra, la persona sufrirá un perjuicio en su salud, cosa que por supuesto ud. no desea. En la ciudad hay  $N$  farmacias.

El tiempo de viaje para ir desde la farmacia  $i$  a la farmacia  $j$  es  $t_{ij}$  [s],  $i, j \in 0, \dots, N$ , donde la “farmacia 0” representa su casa.

El medicamento que ud. desea comprar es muy escaso y es posible que no se encuentre en todas las farmacias. Existe una probabilidad a priori  $p_i$  que el medicamento esté en la farmacia  $i$ . La presencia del medicamento en 2 farmacias cualesquiera son v.a. dependientes en probabilidad: si ud. visita algunas farmacias y encuentra que el medicamento no está disponible en ellas, esa información modifica las probabilidades de encontrarlo en las restantes (en general disminuye la probabilidad de encontrarlo en las que están cerca de una farmacia donde no está el medicamento). Vale decir, la probabilidad de encontrarlo en la farmacia  $i$  es función del itinerario previo.

Entrar a una farmacia a preguntar por el medicamento toma un tiempo de  $\tau$  [s].

1. ¿Cuántas farmacias visitará ud. a lo sumo?
2. Formule un modelo de programación dinámica que permita decidir su itinerario de manera de minimizar el valor esperado del tiempo hasta volver a su casa con el medicamento.

### Resolución Problema

Hay que tener claro que a lo sumo se visitaran las  $N$  farmacias, dado que siempre es factible que el medicamento no se encuentre en ninguna de las  $N$  farmacias.

- **Etapas:** La etapa  $i$  consistirá en el viaje a la  $i$  esima farmacia desde la  $i-1$  esima farmacia (ojo que farmacia  $i$  esima  $\neq$  Farmacia  $i$ )

- **Variables de estado:**

$\vec{S}_i$ , donde:

$$S_{in} = \begin{cases} 1 & \text{Si ya visite la farmacia } n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$F_i$  = Farmacia donde estoy al comienzo de la etapa  $i$

- **Variables de decisión:**

$X_i$  = Farmacia a visitar al final de etapa  $i$

- **Variable aleatoria:**

$$P_n | \vec{S}_i = P[\text{Probabilidad de que el medicamento se encuentre en la farmacia } n,$$

dado que ya visite al conjunto indicado por  $S_i]$

- **Ecuaciones de recurrencia:**

- Etapa  $N+1$ :

$$V_{N+1}^*(S_{N+1}, F_{N+1}) = t_{F_{N+1}0}$$

- Etapa i:

$$V_i(\vec{S}_i, F_i, X_i) = t_{F_i X_i} + \tau + P_{X_i} | \vec{S}_i \cdot [t_{X_i 0}] + (1 - P_{X_i} | \vec{S}_i) \cdot [V_{i+1}^*(\vec{S}_{i+1}, X_i)]$$

Donde:

$$\vec{S}_{i+1} = \vec{S}_i + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow x_i \text{ésima posición}$$

Donde:

$$V_i^*(\vec{S}_i, F_i) = \max_{X_i \neq n \cdot S_{in} \forall n} [V_i(\vec{S}_i, F_i, X_i)]$$

- Condiciones de borde:

$$S_{1,n} = 0 \forall n$$

$$F_1 = 0$$

## Problema 2

Ignatius Reilly trata de encontrar un estacionamiento cerca de su restaurante favorito. Se acerca al restaurante desde el oeste y su meta es estacionarse tan cerca como sea posible del restaurante. Los puestos de estacionamiento disponibles comienzan desde el puesto  $-T$  al oeste, llegan hasta el puesto 0 (justo enfrente del restaurante) y siguen hasta el puesto  $T$  al este del restaurante. Ignatius es miope y no puede ver lo que hay adelante; sólo puede ver si el puesto donde se encuentra está o no vacío. Cuando Ignatius llega a un puesto vacío, deb decidir si estacionarse allí o continuar buscando un lugar más cercano. Una vez que pasa por un puesto de estacionamiento no puede regresar a él. Ignatius estima que la probabilidad que el cajón  $t$  esté vacío es  $p_{tn}$  donde  $n$  es el número de puestos que ya ha pasado y han estado vacíos. Si no encuentra estacionamiento se confunde e incurre en un costo  $P_n$  ( $n$  con el mismo significado), creciente en  $n$ . Si se estaciona en un puesto a  $t$  lugares del restaurante obtiene un beneficio  $|t|$ . Demuestre como puede Ignatius usar la programación dinámica para elaborar una estrategia de estacionamiento que reduzca al mínimo su costo esperado.

## Resolución Problema

Supondremos que cuando el tipo llega a un puesto ve si este esta desocupado o no (dado que alguien planteo la inquietud)

- **Etapas:** Cada uno de los puestos de estacionamiento [del  $-T$  al  $T$ ]
- **Variables de estado:**

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el puesto } i \text{ esta vacío} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$V_i$  = el número de estacionamientos vacios que ignatius ha dejado pasar (sin contar el  $i$ -ésimo)

- **Variables de decisión:**

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si decide estacionarse en puesto } i \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable aleatoria:**

$$P_{in} = P[\text{Probabilidad de que puesto } i \text{ este vacio dado que ya pasaron } n \text{ puestos vacios}]$$

■ Ecuaciones de recurrencia:

- Etapa T+1:

$$V_{T+1}^*(D_{T+1}, S_{N+1}) = P_{D_{T+1}}$$

- Etapa i:

$$V_i(D_i, S_i, x_i) = \begin{cases} |i| \cdot X_i + [P_{i+1, D_i+1} \cdot V_{i+1}^*(D_i + 1, 1) \\ + [1 - P_{i+1, D_i+1}] \cdot V_{i+1}^*(D_i + 1, 0)] \cdot [1 - X_i] & \text{Si } S_i = 1 \\ P_{i+1, D_i} \cdot V_{i+1}^*(D_i, 1) + [1 - P_{i+1, D_i}] \cdot V_{i+1}^*(D_i, 0) & \sim \end{cases}$$

Donde:

$$V_i^*(D_i, S_i) = \max_{X_i < (1-S_i)} [V_i(D_i, S_i, X_i)]$$

- Condiciones de borde:

$$S_{-T-1} = 0$$

$$D_{-T} = 0$$