



Pauta Examen

Problema 1

1. Si el precio de los cachorros es p entonces cada persona que pregunta por este precio compra con probabilidad e^{-p} . De ahí que el proceso de venta de los cachorros sean un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot e^{-p}$ [cachorros/hora]. Considerando que solo existen N cachorros y que el tiempo destinado a la venta son T horas tendremos que $q(k)$, la probabilidad de vender k cachorros es:

$$q(k) = \begin{cases} \frac{(\lambda T \cdot e^{-p})^k e^{-\lambda T \cdot e^{-p}}}{k!} & 0 \leq k < N \\ \sum_{i=N}^{\infty} \frac{(\lambda T \cdot e^{-p})^i e^{-\lambda T \cdot e^{-p}}}{i!} & k = N \end{cases}$$

2. Las ganancias esperadas son:

$$\begin{aligned} E[U] &= \sum_{k=0}^N q(k) \cdot p \cdot k \\ &= p \left[\sum_{k=0}^{N-1} k \cdot \frac{(\lambda T \cdot e^{-p})^k e^{-\lambda T \cdot e^{-p}}}{k!} + \sum_{k=N}^{\infty} N \cdot \frac{(\lambda T \cdot e^{-p})^k e^{-\lambda T \cdot e^{-p}}}{k!} \right] \\ &= p \cdot \lambda T \cdot e^{-p} - p \left[\sum_{k=N}^{\infty} (k - N) \cdot \frac{(\lambda T \cdot e^{-p})^k e^{-\lambda T \cdot e^{-p}}}{k!} \right] \end{aligned}$$

Para encontrar el precio óptimo derivamos e igualamos a 0. Desde allí podemos obtener el valor de p^* .

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda T \cdot e^{-p^*} - p^* \cdot \lambda T \cdot e^{-p^*} - \sum_{k=N}^{\infty} (k - N) \cdot \frac{(\lambda T \cdot e^{-p^*})^k e^{-\lambda T \cdot e^{-p^*}}}{k!} \\ &\quad + \sum_{k=N}^{\infty} k \cdot p^* \cdot e^{-p^*} \cdot (k - N) \cdot \frac{(\lambda T \cdot e^{-p^*})^{k-1} e^{-\lambda T \cdot e^{-p^*}}}{k!} \\ &\quad - \sum_{k=N}^{\infty} p^* \cdot e^{-p^*} \cdot (k - N) \cdot \frac{(\lambda T \cdot e^{-p^*})^{k+1} e^{-\lambda T \cdot e^{-p^*}}}{k!} \end{aligned}$$

3. La probabilidad de que tras las T horas aun no se vendan k cachorros es $q(N - k)$. Si sobran cachorros estos se regalarán (precio 0). Entonces en términos esperados estos cachorros serán vendidos tras k exponenciales de tasa λ [personas hora]. Así la tardanza esperada de Armijo será:

$$\begin{aligned}
E[Tardanza] &= \sum_{k=0}^N \frac{k}{\lambda} \cdot q(N-k) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-k)}{\lambda} \cdot \frac{(\lambda T \cdot e^{-p})^k e^{-\lambda T \cdot e^{-p}}}{k!}
\end{aligned}$$

4. Para que Armijo llegue al menos una hora antes a comer es necesario que durante $t-1$ horas se vendan todos los cachorros, lo que es equivalente a que hallan más de N llegadas en el proceso de venta de los cachorros. Esto es:

$$P[1 \text{ hora antes}] = \sum_{i=N}^{\infty} \frac{(\lambda(T-1) \cdot e^{-p})^i e^{-\lambda(T-1) \cdot e^{-p}}}{i!}$$

5. El modelo sería el siguiente:

- Etapas: Cada uno de los intervalos de tiempo, estos tienen una duración $\Delta t = \frac{T}{K}$ muy pequeña de forma de que la probabilidad de una venta es (recordar definición de los procesos de Poisson) $\lambda \cdot e^{-p} \Delta t + o(\Delta t)$. En lo que sigue ignoraremos el término del orden de Δt dado que estos se irían a cero al momento de tomar límite sobre K .
- Estado: La información relevante es cuanto tiempo queda hasta el final del horizonte (o el periodo en cuestión) y cuantos cachorros quedan por vender.
- Decisión: Cual es el precio de venta de los cachorros.
- Recursión: siendo $t_k = \frac{\Delta t}{K} \cdot k$ y n_k el número de cachorros al comienzo de la etapa k tenemos que:

$$V(t_k, n_k) = \max_p \left\{ \lambda \cdot e^{-p} \Delta t \cdot [p + V(t_{k+1}, n_k - 1)] + (1 - \lambda \cdot e^{-p} \Delta t) \cdot [V(t_{k+1}, n_k)] \right\}$$

- Condiciones de borde:

$$n_0 = N$$

$$V(t_K, n) = 0$$

$$V(t_k, 0) = 0$$

6. Basta tomar limite sobre K en la parte anterior (suponiendo las condiciones necesarias sob la función V). Reordenando la ecuación de recursión de la parte anterior vemos que:

$$V(t_k, n_k) - V(t_{k+1}, n_k) = \max_p \left\{ \lambda \cdot e^{-p} \Delta t \cdot [p + V(t_{k+1}, n_k - 1) - V(t_{k+1}, n_k)] \right\}$$

Dividiendo por Δt y tomando limite tenemos que:

$$-\frac{dV(t, n)}{dt} = \max_p \left\{ \lambda \cdot F(p) \cdot [p + V(t, n - 1) - V(t, n)] \right\}$$

Problema 2

1.

- a) Para armar la cadena representemos los estados con triplas (i, j, k) donde
- i es el número de vehículos operativos al comienzo del día;
 - j es 1 si hay un vehículo en el primer día de reparación y 0 en caso contrario (equivalentemente, j es el número de vehículos en su primer día de reparación) y;
 - k es 1 si hay un vehículo en el segundo día de reparación y 0 en caso contrario.

Los estados posibles entonces son: $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 1)$ (no se puede llegar a $(0, 1, 0)$ ya que si los dos vehículos han fallado, quiere decir que hemos utilizado el vehículo de reserva mientras que el otro estaba en el primer día de taller, y por lo tanto cuando el segundo consigue entrar al taller, el primero ya ha sido reparado; observemos que esto sí podría pasar si no partiéramos con los dos vehículos operativos).

Usando ese orden para los estados, la matriz de probabilidades de transición queda:

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- b) Esta cadena tiene probabilidades estacionarias porque es ergódica (es decir, tiene una única clase, que es recurrente y aperiódica).

Estas probabilidades satisfacen el sistema $\pi P = \pi$ y $\sum \pi_i = 1$ (observemos que aquí π es un vector fila, el sistema $P\pi = \pi$ no tiene sentido; si quisiéramos que π fuera un vector columna, el sistema correcto es $P^\top \pi = \pi$).

Las probabilidades estacionarias son

$$\begin{aligned} \pi_{(2,0,0)} &= \frac{1-p}{1+p+p^2}, \\ \pi_{(1,1,0)} &= \frac{p}{1+p+p^2}, \\ \pi_{(1,0,1)} &= \frac{p}{1+p+p^2}, \\ \pi_{(0,0,1)} &= \frac{p^2}{1+p+p^2}. \end{aligned}$$

- c) Sólo se paga cuando ambos vehículos están malos, por lo tanto, el costo promedio por día es $C \cdot \frac{p^2}{1+p+p^2}$.
- d) La idea aquí era que se pagaba D por cada reparación. Una cadena que representa esta nueva situación tiene dos estados (número de vehículos operativos: 1 o 2) y su matriz de probabilidades de transición es

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{bmatrix},$$

y las probabilidades estacionarias son $\pi_1 = p$, $\pi_2 = 1 - p$. Entonces el costo promedio del nuevo servicio sería $p \cdot D$ y para que sea conveniente debe cumplirse que $D \leq C \cdot \frac{p}{1 + p + p^2}$.

2.

- a) La cadena para este problema se muestra en la figura al final de esta pauta. Los estados $i = 1, 2, \dots$ representan la situación en que hay i autos esperando (y el semáforo está rojo). El estado R es el caso semáforo rojo y no hay autos y el estado V es “semáforo verde”.
- b) Esta cadena tiene probabilidades estacionarias ya que se cumple la condición que la tasa de entrada ($1/\alpha$) es menor a la tasa de salida ($\beta + 1/\alpha$) para los estados de la “parte infinita” de la cadena.

Para los estados $i \geq 2$, de la ecuación $\left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right) \pi_i = \frac{1}{\alpha} \pi_{i-1}$ podemos deducir que $\pi_i = \frac{1}{1 + \alpha\beta} \pi_{i-1}$. De manera similar, $\pi_1 = \frac{1}{1 + \alpha\beta} \pi_R$. Por lo tanto, para $i \geq 1$, $\pi_i = \left(\frac{1}{1 + \alpha\beta}\right)^i \pi_R$. Además, $\left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right) \pi_R = \beta \pi_V$ y por lo tanto, $\pi_R = \left(\frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta}\right) \pi_V$. Sumando todas las probabilidades tenemos que

$$1 = \pi_V \left[1 + \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \alpha\beta}\right)^i \right] = \pi_V \left[1 + \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \cdot \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha\beta} \right] = 2\pi_V,$$

y por lo tanto $\pi_V = 1/2$.

- c) La probabilidad que un auto encuentre luz roja es la misma que encuentre luz verde, es decir $1/2$ (las tasas de cambio de luz son iguales). Esto se puede obtener también, a partir de las probabilidades estacionarias calculadas en el punto anterior.
- d) El número promedio de autos detenidos es

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \pi_i = \frac{\alpha\beta}{2(1 + \alpha\beta)} \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{1}{1 + \alpha\beta}\right)^i = \frac{\alpha\beta}{2(1 + \alpha\beta)} \frac{(1 + \alpha\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{1 + \alpha\beta}{2}.$$

Para calcular el tiempo que pasa un auto detenido usamos Little:

$$W = \alpha L = \frac{\alpha(1 + \alpha\beta)}{2}$$

Problema 3

1. El sistema queda de la siguiente forma:

Es necesario notar que, debido a los flujos de clientes entre el *Bar* y la *Zona de Baile*, es necesario calcular la tasa efectiva de entrada a estos sistemas. Esto se consigue al resolver este sistema lineal de ecuaciones:

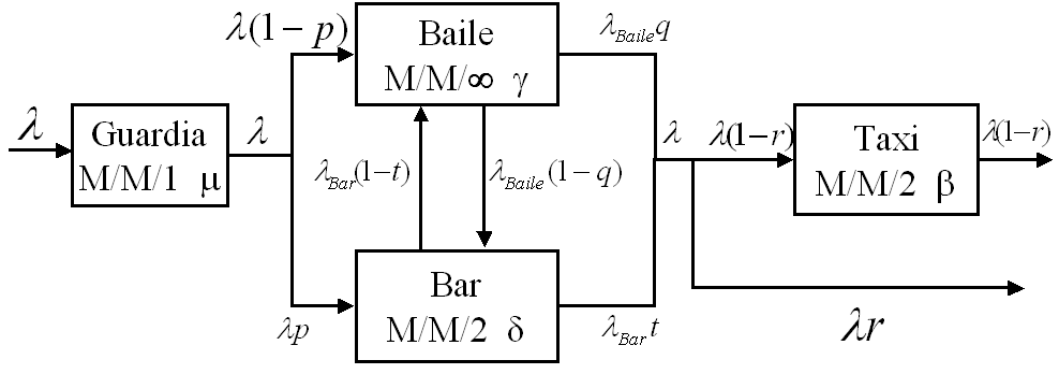


Figura 1: Local del Jote

$$\lambda_{Bar} = \lambda \cdot p + (1 - q) \cdot \lambda_{Baile} \quad (1)$$

$$\lambda_{Baile} = \lambda \cdot (1 - p) + (1 - t) \cdot \lambda_{Bar}$$

Al resolver este sistema se obtienen las tasas efectivas que se muestran en la siguiente tabla:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Guardia	λ_G	λ
Bar	λ_{Bar}	$\frac{\lambda(p + (1 - p)(1 - q))}{1 - (1 - t)(1 - q)}$
Zona de Baile	λ_{Baile}	$\frac{\lambda(1 - p + p(1 - t))}{1 - (1 - t)(1 - q)}$
Taxi	λ_{Taxi}	$\frac{\lambda}{1 - r}$

Respecto a las condiciones de estado estacionario, éstas son las siguientes:

Sistema	Condición
Guardia	$\frac{\lambda_G}{\mu} < 1$
Bar	$\frac{\lambda_{Bar}}{2\delta} < 1$
Zona de Baile	Siempre, ya que es una $M/M/\infty$
Taxi	$\frac{\lambda_{Taxi}}{2\beta} < 1$

- En promedio, $3 \cdot \lambda_{Bar}$ personas van al Bar en tres horas luego, los ingresos por venta de bebiads durante tres horas corresponden a:

$$3 \cdot \lambda_{Bar}(w \cdot \$K_g + (1 - w) \cdot \$K_a)$$

3. Se está pidiendo el tiempo esperado en el sistema, esto corresponde a:

$$W_G + W_{Baile} + W_{Bar} + W_{Taxi}$$

utilizando la ecuación de Little, se pueden obtener los valores de W_G, W_{Bar} y W_{Taxi} , L se calcula de la siguiente forma:

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i i$$

Sistema	Tasa Efectiva	L	W
Guardia	λ_G	$\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	$\frac{1}{\mu - \lambda}$
Bar	λ_{Bar}	$\frac{\lambda_{Bar}}{\delta(1 - (\frac{\lambda_{Bar}}{2\delta})^2)}$	$\frac{1}{\delta(1 - (\frac{\lambda_{Bar}}{2\delta})^2)}$
Zona de Baile	λ_{Baile}	$\frac{\lambda_{Baile}}{\gamma}$	$\frac{1}{\gamma}$
Taxi	λ_{Taxi}	$\frac{\lambda_{Taxi}}{\beta(1 - (\frac{\lambda_{Taxi}}{2\beta})^2)}$	$\frac{1}{\beta(1 - (\frac{\lambda_{Taxi}}{2\beta})^2)}$

De esta forma, el valor corresponde a:

$$W_{Total} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda} + \frac{\lambda_{Bar}}{\delta(1 - (\frac{\lambda_{Bar}}{2\delta})^2)} + \frac{\lambda_{Baile}}{\gamma} + \frac{\lambda_{Taxi}}{\beta(1 - (\frac{\lambda_{Taxi}}{2\beta})^2)} \right)$$

Que es, utilizando la ecuación de Little, el número total de personas en el sistema, dividido por la tasa de entrada a él.

4. Como sólo se modifica el *Bar*, el tiempo en los demás sistemas permanece igual, antes y después de contratar más *barman*, por lo que la reducción de tiempo en el sistema se puede escribir como:

$$\Delta W = W_{Bar} - W'_{Bar}$$

El menor tiempo que se puede permanecer en el *Bar* es cuando se contratan infinitos *barman* para que atiendan a los sedientos clientes del club luego, este sistema pasa a ser una cola $M/M/\infty$, por lo que el tiempo en el *Bar* es:

$$W'_{Bar} = \frac{1}{\delta}$$

de la parte anterior, se tiene que el tiempo en el *Bar* cuando atienden 2 *barman* es:

$$W_{Bar} = \frac{1}{\delta(1 - (\frac{\lambda_{Bar}}{2\delta})^2)}$$

Así, la máxima reducción posible en el tiempo que los clientes pasan en el local corresponde a:

$$W_{Bar} - W'_{Bar} = \frac{1}{\delta(1 - (\frac{\lambda_{Bar}}{2\delta})^2)} - \frac{1}{\delta}$$

5. Nos preguntan acá, cuántas veces entrará en promedio una persona que, al llegar al *Local del Jote*, entra directo al *Bar*. Sabemos que a priori tendrá entonces una asistencia al bar. Sabemos además que con probabilidad $(1 - t)$ irá a la pista de baile y que con probabilidad $(1 - t) \cdot (1 - q)$ regresará al bar. Además sabemos que una vez estando en el bar se retirará con probabilidad t . Así el número esperado de veces que una persona que entra al bar asistirá al mismo es:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i + 1) \cdot (1 - t)^i \cdot (1 - q)^i \cdot t$$

Claramente, esta expresión puede ser reducida aun más, pero esto queda propuesto.

6. Como *Pepe* salió del local por su propia voluntad, sin ser expulsado por el guardia, se sabe que éste consumió a lo más un trago, es decir, fue al *Bar* 0 ó 1 vez. Por lo tanto *Pepe* puede haber seguido una de las siguientes rutas entre el *Bar* y la *Zona de Baile* antes de ir para su casa, ya sea en Taxi o por sus propios medios:

- *Bar*, lo que ocurre con probabilidad $p \cdot t$
- *Bar - Baile*, lo que ocurre con probabilidad $p \cdot (1 - t) \cdot q$
- *Baile* lo que ocurre con probabilidad $(1 - p) \cdot q$
- *Baile - Bar* lo que ocurre con probabilidad $(1 - p) \cdot (1 - q) \cdot t$
- *Baile - Bar - Baile* lo que ocurre con probabilidad $(1 - p) \cdot (1 - q) \cdot (1 - t) \cdot q$

De las partes anteriores ya sabemos el tiempo promedio que una persona permanece en cada subsistema, por lo que ya sabemos los valores W_{Baile} , W_{Bar} . Así solo debemos ponderar el tiempo por la probabilidad y normalizar las probabilidades con el fin de acotar el hecho de que ya sabemos que la persona se retiró por su voluntad, es decir hacer que las 5 probabilidades planteadas anteriormente cubran todo el espacio de probabilidad. Así:

$$E[tiempo] = \frac{W_{Bar}p \cdot t + (W_{Baile} + W_{Bar}) \cdot p \cdot (1 - t) \cdot q + W_{Baile} \cdot (1 - p) \cdot q}{p \cdot t + p \cdot (1 - t) \cdot q + (1 - p) \cdot q + (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot t + (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot (1 - t) \cdot q} \\ + \frac{(W_{Baile} + W_{Bar}) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot t + (2 \cdot W_{Baile} + W_{Bar}) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot (1 - t) \cdot q}{p \cdot t + p \cdot (1 - t) \cdot q + (1 - p) \cdot q + (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot t + (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot (1 - t) \cdot q}$$