



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: Pablo Rey, Denis Sauré, Rafael Epstein.  
Aux : C. Berner, A. Neely, D. Yung

## CTP 5

### Martes 16 de Noviembre de 2004

El doctor Werner Shapatín ha instalado un nuevo centro médico con la intención de poder ejercer su profesión de manera más libre y acorde a sus extraños métodos. El centro médico cuenta con dos oficinas, una para el famoso doctor y otra compartida por sus dos alumnos en práctica. Además, estas dos oficinas comparten una misma **Secretaria**.

La consulta del Dr. Shapatín recibe pacientes según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ [pacientes/hora]. Se sabe además que todos los pacientes son mujeres debido a la gran fama que tiene la suave y delicada "mano" del doctor. Todas las pacientes son atendidas por una **Secretaria** al llegar a la consulta, el tiempo que demora en recibir e ingresar los datos de las pacientes se distribuye exponencialmente de media  $\frac{1}{\mu_S}$  [horas]. La bella secretaria debe derivar a las pacientes ya sea al **Dr. Shapatín** o a uno de los dos **alumnos en práctica** que trabajan en el centro médico. El doctor le ha dicho a su Secretaria que las pacientes más agraciadas, que corresponden a una fracción  $p$  de las pacientes que llegan al centro médico, sean derivadas a su oficina. Mientras tanto, la fracción restante de las pacientes que llegan al centro deben ser atendidas por los desafortunados discípulos del doctor. El Dr. Shapatín atiende a sus bellas pacientes durante un tiempo exponencialmente distribuido de tasa  $\mu_{Sh}$ [1/horas], mientras que los alumnos en práctica, que comparten la misma oficina, atienden cada uno a las no tan bellas pacientes en un tiempo distribuido exponencialmente de media  $\frac{1}{\mu_A}$  [horas] cada uno.

Debido a la inexperiencia de los alumnos en práctica, una fracción  $t$  de las pacientes que son atendidas por ellos es derivada al Dr. Shapatín debido a complicaciones en el diagnóstico y tratamiento de su enfermedad. Además, quienes no fueron redirigidas a la consulta del afamado galeno con una probabilidad  $q$  deciden infiltrarse en la sala de espera con la **secretaria** esperando tener una nueva oportunidad de atención. La fracción restante de mujeres que provienen desde la consulta de los alumnos  $(1 - q)$ , se encamina hacia un **laboratorio** del centro médico, en donde deberán realizarse exámenes. En cuanto a las pacientes que fueron atendidas por el doctor Shapatín, una vez terminada esta atención, todas se van directamente hacia el laboratorio para realizarse exámenes. En el **laboratorio** existe un único encargado, que demora un tiempo que se distribuye exponencialmente de media  $\frac{1}{\mu_L}$  [horas] en atender a cada paciente. Sin embargo, se sabe que una fracción  $r$  de las pacientes deberá rehacer su examen debido a que resultó defectuoso. Una vez realizado el examen de forma exitosa, abandonan el centro médico.

En base a la situación anterior, responda:

1. (3.0 Puntos) Modele el sistema descrito como una red de colas, indicando a que sistema de espera corresponde cada uno de los subsistemas descritos, utilice para esto la notación de Kendall. Defina las tasas efectivas para cada subsistema y las condicione para que exista estado estacionario.
2. (1.0 Puntos) ¿Qué fracción de los pacientes que atiende el Dr. Shapatín proviene de los alumnos en práctica?
3. (1.0 Puntos) Obtenga el tiempo de permanencia en el sistema, en el largo plazo, de las pacientes que no fueron atendidas por los alumnos en práctica, es decir que una vez que fueron atendidas por la secretaria, ésta las derivó donde el Dr.
4. (1.0 Puntos) Suponga que el doctor desea disminuir el tiempo que sus pacientes menos agraciadas deben pasar en la consulta, eliminando así el deseo de éstas de infiltrarse con la secretaria para tener una nueva oportunidad de ser atendidas por el Dr. Shapatín, Entregue una cota para la máxima reducción

del tiempo de permanencia de las pacientes que no son atendidas por el Dr. Shapatín, suponiendo para esta pregunta que nadie se infirma con la Secretaria y que el doctor puede contratar todos los alumnos en práctica que desee debido a que no debe pagarles.

### Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones.

$$X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda) : f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0 \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda) : \Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

$$X \rightsquigarrow \text{geométrica}(p) : \Pr[X = k] = (1-p) \cdot p^k \quad E(X) = \frac{p}{1-p} \quad \text{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$$

- Algunas series.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}, \text{ si } |a| < 1.$$

- Sistemas elementales de espera en estado estacionario.

$M/M/1$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \Pi_0 = 1-\rho \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$M/M/2$

$$L = \frac{2 \cdot \rho}{1-\rho^2} \quad \Pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad \rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu}$$