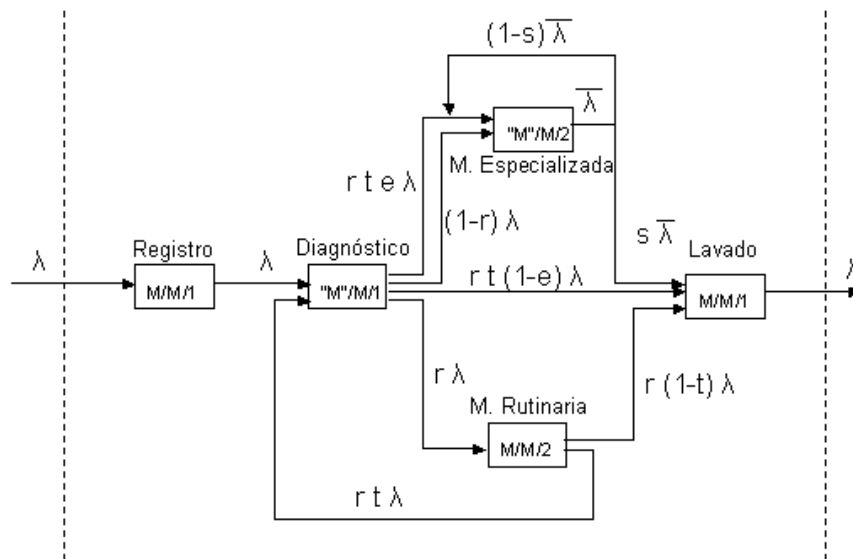




Solución Clase Auxiliar 15 de Noviembre, 2004
Redes de Colas

Problema 1

1. El sistema queda de la siguiente forma:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Registro	λ_{Reg}	λ
Diagnóstico	λ_{Diag}	$\lambda + \lambda r t$
M. Especializada	λ_{Esp}	$\frac{\lambda \cdot (e r + (1-r))}{s}$
M. Rutinaria	λ_{Rut}	$r \lambda$
Salida	λ_{Sal}	λ

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Registro	$\frac{\lambda_{Reg}}{\mu_1} < 1$
Diagnóstico	$\frac{\lambda_{Diag}}{\mu_2} < 1$
M. Especializada	$\frac{\lambda_{Esp}}{2\mu_3} < 1$
M. Rutinaria	$\frac{\lambda_{Rut}}{2\mu_4} < 1$
Salida	$\frac{\lambda_{Sal}}{\mu_5} < 1$

2. Procedemos como siempre:

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}} = \frac{\lambda r t e}{\lambda r t e + (1-r)\lambda}$$

3. Para esta parte utilizamos las formulas de los sistemas de colas clásicos y la formula de Little. De esta forma, dado que se conoce completamente la trayectoria que seguirá el auto, se puede ver que:

$$E(\text{Tiempo}) = E(\text{T Registro}) + E(\text{T Diagnóstico}) + E(\text{T especialista}) + E(\text{T Salida})$$

Utilizando los resultados elementales la expresión queda:

$$E(\text{Tiempo}) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_1} + \frac{\lambda_{Diag}}{\lambda_{Diag} + \mu_2} + E(\text{T especialista}) + \frac{\lambda_{Sal}}{\lambda_{Sal} + \mu_3}$$

Por otro lado se puede calcular el tiempo en el subsistema de Especialistas condicionando sobre N= Número de veces que se reingresa al sistema de especialistas. De esta forma:

$$E(\text{T Especialista}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(\text{T Especialista dado } N=k) \cdot P(N=k)$$

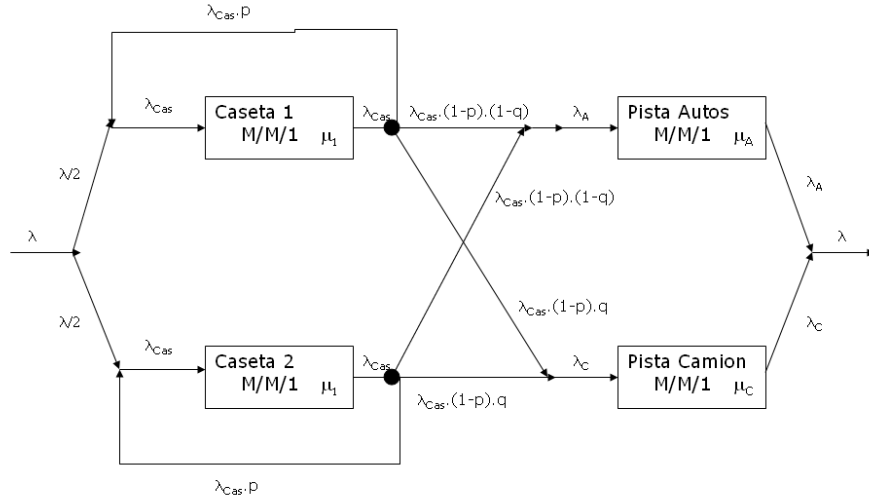
$$E(\text{T Especialista}) = \sum_{k=0}^{\infty} (K+1) E(\text{T Reparación}) s(1-s)^k$$

$$E(\text{T Especialista}) = \sum_{k=0}^{\infty} (K+1) \frac{\frac{\lambda_{Esp}}{\mu_3}}{1 - \left(\frac{\lambda_{Esp}}{2\mu_3}\right)^2} s(1-s)^k$$

$$E(\text{T Especialista}) = \frac{4\lambda_{Esp} \cdot \mu_3}{4\mu_3^2 + \lambda_{Esp}^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{4\lambda_{Esp} \cdot \mu_3}{s(4\mu_3^2 + \lambda_{Esp}^2)}$$

Problema 2

1. El sistema queda de la siguiente forma:



2. De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Casetas	λ_{Cas}	$\frac{\lambda}{2(1-p)}$
Autos	λ_A	$\lambda(1-q)$
Camiones	λ_C	λq

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Casetas	$\frac{\lambda_{Cas}}{\mu_1} < 1$
Autos	$\frac{\lambda_A}{\mu_A} < 1$
Camiones	$\frac{\lambda_C}{\mu_C} < 1$

3. El número de camiones a la entrada de la pista de camiones es una cola M/M/1 con tasa de llegada λ_C y tasa de atención μ_C , luego utilizando el resultado conocido para colas de este tipo se tiene que:

$$\begin{aligned}\pi_k &= \rho^k \cdot (1 - \rho) \\ \pi_0 &= (1 - \rho) \\ \rho &= \frac{\lambda_C}{\mu_C}\end{aligned}$$

4. El número promedio de autos en la respectiva pista de obtiene utilizando L de una cola M/M/1:

$$L_A = \frac{\rho_A}{1 - \rho_A}$$

donde :

$$\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A}$$

5. Un auto dentro del sistema pasa por una de las casetas (que son iguales dada las tasas de atención y las tasas efectivas de entradas) y por la entrada de la pista de autos. Luego:

$$W_A = W_{Cas} + W_{pista}$$

Además se tiene que para un M/M/1 se tiene que:

$$W_{M/M/1} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Sin embargo el número de veces que un auto pasa por una caseta antes de ir a su respectiva pista, es una variables aleatoria de distribución geométrica de parámetro p . Recordando que la esperanza de una geométrica (p) es $\frac{1}{1-p}$ concluimos que:

$$W_{Cas} = \frac{1}{1-p} \cdot W_{M/M/1}$$

Entonces:

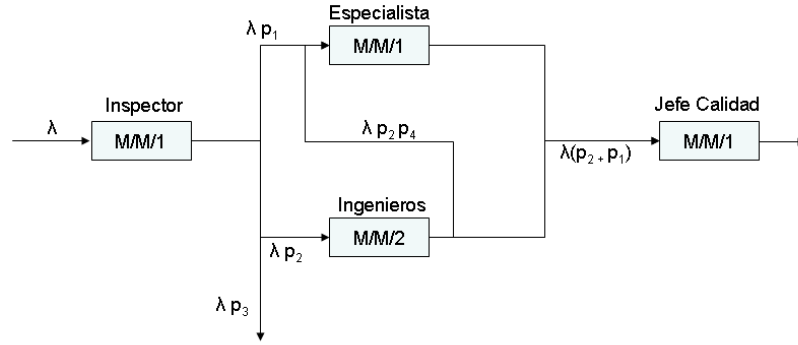
$$W_A = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{\mu_1 - \lambda_{Cas}} + \frac{1}{\mu_A - \lambda_A}$$

Análogamente para un camión:

$$W_C = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{\mu_1 - \lambda_{Cas}} + \frac{1}{\mu_C - \lambda_C}$$

Problema 3

1. Sean $p_1 = 10\%$, $p_2 = 5\%$, $p_3 = 85\%$ y $p_4 = 20\%$, el sistema queda como sigue:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Expresión	Valor
Inspector	λ_{ins}	λ	λ
Especialista	λ_{esp}	$\lambda(p_1 + p_2 \cdot p_4)$	$0.11 \cdot \lambda$
Ingenieros	λ_{ing}	$\lambda \cdot p_2$	$0.05 \cdot \lambda$
Jefe Calidad	λ_{cal}	$\lambda \cdot (p_1 + p_2)$	$0.15 \cdot \lambda$

2. Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Inspector	$\frac{\lambda_{ins}}{\mu_1} < 1$
Especialista	$\frac{\lambda_{esp}}{\mu_2} < 1$
Ingenieros	$\frac{\lambda_{ing}}{2\mu_3} < 1$
Jefe Calidad	$\frac{\lambda_{cal}}{\mu_4} < 1$

3. La fracción de productos que llegan al departamento y que son analizados por el especialista en fallas menores es :

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}} = \frac{\lambda \cdot (p_1 + p_2 \cdot p_4)}{\lambda} = 11 \%$$

4. En esta parte hay dos formas posibles de proceder:

Forma 1:

Calculando los largos promedios de cada uno de los subsistemas usando las expresiones conocidas, se obtiene:

Sistema	L_i	ρ_i
Inspector	$\frac{\rho_{ins}}{1 - \rho_{ins}}$	$\frac{\lambda_{ins}}{\mu_1}$
Especialista	$\frac{\rho_{esp}}{1 - \rho_{esp}}$	$\frac{\lambda_{esp}}{\mu_2}$
Ingenieros	$\frac{2 \cdot \rho_{ing}}{1 - \rho_{ing}^2}$	$\frac{\lambda_{ing}}{2\mu_3}$
Jefe Calidad	$\frac{\rho_{cal}}{1 - \rho_{cal}}$	$\frac{\lambda_{cal}}{\mu_4}$

Luego:

$$L_{total} = L_{ins} + L_{esp} + L_{ing} + L_{cal}$$

Finalmente usando la frmula de Little, se obtiene:

$$W_{total} = \frac{L_{total}}{\lambda}$$

Forma 2:

Calculando los tiempos de permanencia promedio en cada subsistema como:

$$W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

donde λ_i representa la tasa efectiva de entrada al sistema i, el tiempo de permanencia en el sistema total se puede obtener de la siguiente forma:

$$W_{total} = W_{ins} + W_{esp} \cdot (p_1 + p_2 \cdot p_4) + W_{ing} \cdot p_2 + W_{cal} \cdot (p_1 + p_2)$$

5. Bajo estas condiciones el subsistema del Inspector se transforma de una cola M/M/1 a una M/M/1/50. Con esto las salidas de esta sistema y por lo tanto la entrada a los subsiguientes deja de ser poissoniana y el sistema no se podría estudiar con los modelos estudiados, a no ser que las tasas de entrada y atención sean tales que nunca se alcance la capacidad máxima del sistema.
6. Si se agrega un número ilimitado de especialistas ese subsistema se transforma en una cola M/M/ ∞ , en la cual el número de productos en el sistema tiene una distribución de Poisson de media $L = \frac{\lambda_{esp}}{\mu_2}$. El tiempo promedio que permanece un producto en este subsistema es $\frac{1}{\mu_2}$, ya que al existir capacidad ilimitada en la atención no se forma cola y el tiempo en el sistema es igual al tiempo de atención.

Con lo anterior es posible calcular un nuevo W_{total_2} de las mismas dos formas posibles mostradas en la parte 4 y se puede cuantificar la disminución del tiempo en el sistema como :

$$\delta = W_{total} - W_{total_2}$$

donde W_{total} es el calculado en la parte 4.

Dudas, consultas y comentarios a
dsaure@dii.uchile.cl