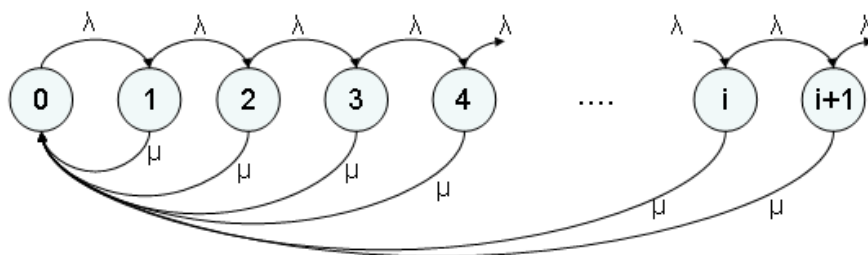




Solución Clase Auxiliar 12 de Noviembre, 2004
Repaso Control 3

Problema 1

- Definiendo los estados como el número de ofertas que tiene Tom Bollinery sobre su escritorio en un instante cualquiera, la cadena queda como sigue:



En esta situación, lo único que hay que imponer para que exista régimen estacionario es que $\mu > 0$, porque siempre eventualmente el sistema se vaciará.

Aplicando conservación de flujo se tiene que las ecuaciones para calcular las probabilidades estacionarias son :

$$\lambda \cdot \pi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \cdot \mu \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \pi_1 = \pi_0 \cdot \lambda \quad (2)$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \pi_i = \pi_{i-1} \cdot \lambda \quad \forall i \geq 2 \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \quad (4)$$

De las ecuaciones (4) se tiene que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = (1 - \pi_0)$$

reemplazando en (1) :

$$\lambda \cdot \pi_0 = (1 - \pi_0) \cdot \mu \implies \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Reemplazando π_0 en la ecuación (2) se obtiene:

$$\pi_1 = \frac{\lambda \cdot \mu}{(\lambda + \mu)^2}$$

Finalmente:

$$\pi_i = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i$$

2. El tiempo promedio que permanece una propuesta en el escritorio es : $\frac{1}{\mu}$.
El número promedio de propuestas en el escritorio es :

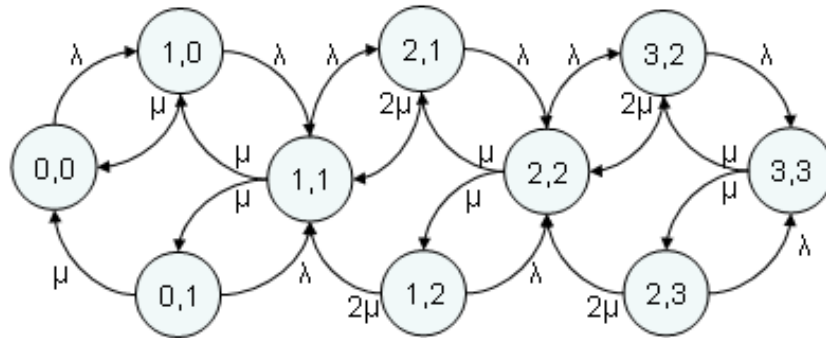
$$L_{propuestas} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i$$

Usando la serie : $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho^2)}$

se obtiene finalmente que :

$$L_{propuestas} = \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)\right)^2}$$

3. Definiendo los estados como un par ordenado, en que la primera componente es el numero de autos en la estación 1 y la segunda componente como el nmero de autos en la estación 2, la cadena queda como sigue:



4. La cadena es finita y todos los estados están comunicados, por lo que tiene probabilidades estacionarias y no hay necesidad de imponer condición alguna sobre las tasas .
- a) La fracción de clientes que en una hora no puede ingresar a la planta es : $\Pi_{3,3}$
- b) El número promedio de autos en espera, en la planta esta dado por:

$$L_q = 1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}$$

- c) El tiempo promedio de espera en cola de un auto antes de ser atendido, está dado por la fórmula de Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}}{\lambda \cdot (1 - \pi_{3,3})}$$

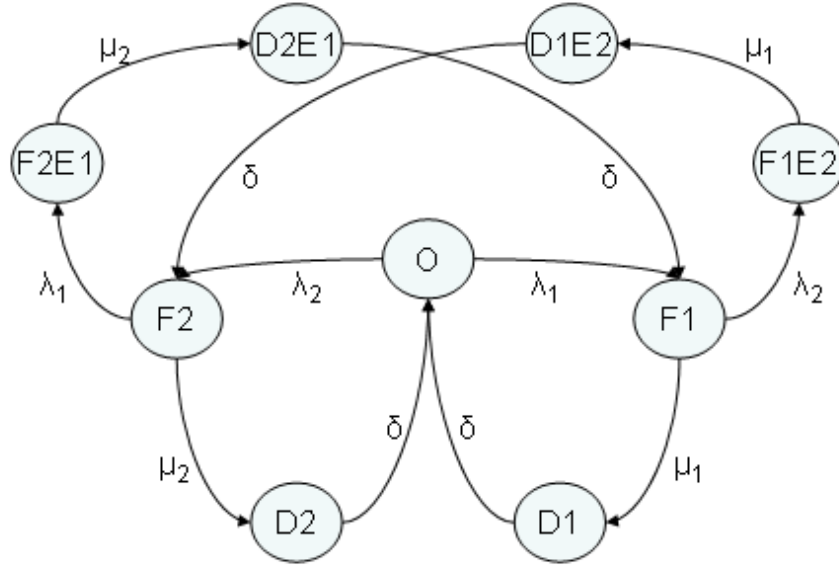
Problema 2

1. Existen varias formas de modelar la cadena Escogeremos un cadena de 9 estados, ya que facilitara responder las preguntas formuladas a partir del modelo. Los estados de la cadena son los siguientes:

- O : Ocioso, espera por llamadas.
Fi : Sastre fabricando el traje cliente i , no existen pedidos pendientes
FiEj : Sastre fabricando el traje para el cliente i , existe un pedido pendiente del cliente j
Di : Sastre descansa hasta que venga el cliente i , no existen pedidos pendientes
DiEj : Sastre descansa hasta que venga el cliente i , existe un pedido pendiente del cliente j

Así, la cadena toma la siguiente forma:

Estamos frente a una cadena finita, por lo que aseguramos la existencia de probabilidades estacionarias.



2. Los estados donde se fabrica el traje para el cliente 1 son $F1$ y $F1E2$. Los estados donde se fabrica un traje son $F2$ y $F2E1$, $F1$ y $F1E2$. De esto vemos que la prob. de estar trabajando en el traje 1 es:

$$\frac{\pi_{F1} + \pi_{F1E2}}{\pi_{F1} + \pi_{F2} + \pi_{F1E2} + \pi_{F2E1}}$$

3. Para calcular la fracción de llamadas perdidas seguimos los pasos dados en el enunciado:

- a) Los únicos estados donde podemos perder llamados son los D_i , dado que descanso y el cliente j sigue llamando. Así:

$$E[\text{Llamadas perdidas}] = \lambda_1 \cdot \pi_{D2} + \lambda_2 \cdot \pi_{D1}$$

- b) Ahora identificamos los estados desde donde se producen llamados:

$$E[\text{Llamadas realizadas}] = \lambda_1 \cdot \pi_{D2} + \lambda_2 \cdot \pi_{D1} + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \pi_O + \lambda_2 \cdot \pi_{F1} + \lambda_1 \cdot \pi_{F2}$$

- c) Ahora solo dividimos el resultado de la parte a por el resultado de la parte b.

4. Supondremos que actualmente se está trabajando en el traje 1 y no hay pedidos pendientes (en este caso hay solo 1 traje 1 consecutivo). Sea N el número de trajes 1 fabricados en forma consecutiva. Entonces:

$$\begin{aligned} E[N] &= E[N|\text{Paso a } F1E2] \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_1} + E[N|\text{Paso a } D1] \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_2 + \mu_1} \\ &= 1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_1} + E[N|\text{Paso a } D1|\text{Paso a } O] \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_2 + \mu_1} \\ &= 1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_1} + (E[N|\text{Paso a } D1|\text{Paso a } O|\text{Paso a } F1] \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &\quad + E[N|\text{Paso a } D1|\text{Paso a } O|\text{Paso a } F2] \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}) \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_2 + \mu_1} \\ &= 1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_1} + ((E[N] + 1) \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &\quad + 1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}) \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_2 + \mu_1} \end{aligned}$$

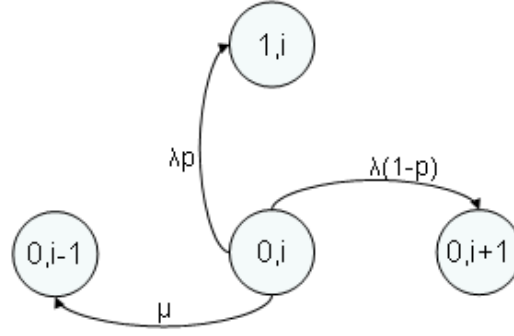
Entonces:

$$E[N] = \frac{1}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$

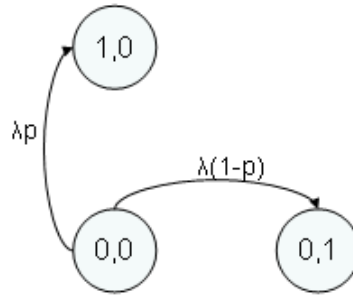
Problema 3

- Los estados de la cadena de Markov serán pares ordenados. La primera componente nos indicará cuantos clientes tipo 1 se encuentran en el sistema. La segunda componente nos dirá cuantos clientes tipo 2 hay. Claramente mientras haya clientes tipo 1 en el sistema se estará atendiendo a un cliente tipo 1. Existen 3 clases de estados que generalizan toda la cadena (optamos por no escribir el grafo completo).

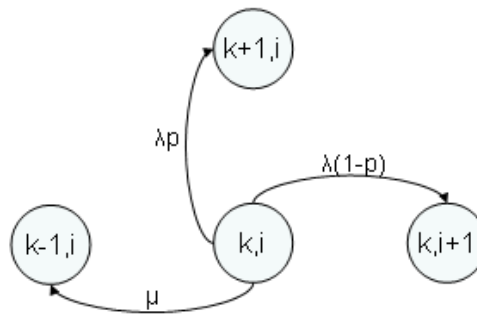
La primera clase, se refiere a cuando hay personas tipo 2 y nadie tipo 1:



La segunda clase se refiere a cuando no hay gente en el sistema:



La tercera clase se refiere a cuando hay personas tipo 1:



- Las ecuaciones de estado estacionario son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \pi_{j,i}(\lambda + \mu) &= \pi_{j-1,i} \lambda \cdot p + \pi_{j,i-1} \cdot \lambda \cdot (1-p) + \pi_{j+1,i} \cdot \mu \\
 \pi_{j,0}(\lambda + \mu) &= \pi_{j-1,0} \lambda \cdot p + \pi_{j+1,0} \cdot \mu \\
 \pi_{0,i}(\lambda + \mu) &= \pi_{0,i-1} \lambda \cdot (1-p) + \pi_{1,i} \cdot \mu \\
 \pi_{0,0}(\lambda + \mu) &= \pi_{0,1} \cdot \mu + \pi_{1,0} \cdot \mu \\
 \sum_{i,j} \pi_{i,j} &= 1
 \end{aligned}$$

3. Los clientes tipo 1 enfrentan un sistema M/M/1. Por lo tanto se aplican las formulas de este sistema:

$$W_1 = \frac{1}{\mu - \lambda \cdot p}$$

4. Utilizando las probabilidades estacionarias podemos calcular el número promedio de gente en el sistema. Con la formula de Little podemos calcular W_T , el tiempo de espera promedio de una persona cualquiera. Sin embargo sabemos que una persona cualquiera es tipo 1 con probabilidad p . Entonces para calcular W_2 , el tiempo promedio de espera de un cliente tipo 2, debemos realizar el siguiente cálculo:

$$W_T = p \cdot W_1 + (1 - p) \cdot W_2$$

Donde la única incognita es W_2 .

Dudas, consultas y comentarios a
dyung@ing.uchile.cl