



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: Pablo Rey, Denis Sauré, Rafael Epstein.  
Aux : C. Berner, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 12 de Noviembre, 2004  
Repaso Control 3

## Problema 1

Un ex-subsecretario de transportes de un país muy lejano, llamado Tom Bollinery, es el encargado de recibir propuestas para una licitación de Plantas de Revisión Técnica en una ciudad al sur del país, llamada Arrankawua. Sobre su escritorio caben un número indeterminado de sobres con propuestas, los que llegan según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  propuestas por hora. Sin embargo la licitación está arreglada de antemano, la cual previo pago de algunas comisiones será ganada por un amigo de Tom Bollinery, por lo que el ex-subsecretario ni siquiera mira las propuestas que le llegan, sino que simplemente a intervalos de tiempo exponencialmente distribuidos de tasa  $\mu$ , toma todos los sobres que encuentre sobre su escritorio y los bota a la basura.

1. Modele la cantidad de sobres con propuestas, sobre la mesa del subsecretario Bollinery como una Cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Cuál es la condición de existencia de régimen estacionario.
2. ¿Cuánto tiempo estará una propuesta sobre el escritorio del subsecretario?. ¿Cuál es el promedio de propuestas en el escritorio del subsecretario en el largo plazo?.

Considere que como era de esperar la licitación fue adjudicada al amigo de Tom Bollinery, el cual lo ha contratado a ud. para estudiar el sistema de espera de la Planta de Revisión Técnica. La planta consta de dos estaciones idénticas, que funcionan en paralelo que pueden ser modeladas como colas M/M/1/3. Esto es las llegadas son según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  autos por hora, las atenciones son exponenciales de media  $\frac{1}{\mu}$  horas, y la capacidad de cada estación es de 3 autos incluyendo al que se está sirviendo. Cuando un cliente llega se ubica en la estación que tenga menos autos y frente a empates, SIEMPRE prefieren la estación 1. Además los clientes que se encuentran al *final de cada fila*, se cambian instantáneamente a la cola de la otra estación si es que al cambiarse el número de autos que quedan delante de él es menor que el actual.

3. Modele el estado de ocupación de cada estación de la Planta de Revisión Técnica en una única Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Encuentre la condición sobre las tasas para que exista régimen estacionario.
4. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, entregue expresiones para :
  - a) La fracción de clientes que en una hora no pueden ingresar al sistema porque no hay capacidad disponible.
  - b) El número promedio de autos esperando por atención en toda la Planta.
  - c) El tiempo promedio de espera en cola de un auto que logra ingresar a la planta.

## Problema 2

Armijo Catalán encarna en esta ocasión a un esforzado sastre, que tan solo cuenta con 2 clientes. La dinámica de su negocio es la siguiente: Armijo, atento al teléfono de su local, espera por la llamada de alguno de sus clientes. Cuando esto ocurre comienza rápidamente a confeccionar el traje de acuerdo a la medida del cliente específico. La experiencia le indica a Armijo que el tiempo que demora en confeccionar un traje para el cliente  $i$  es una variable aleatoria de distribución exponencial de tasa  $\mu_i$ .

Una vez que Armijo termina el traje se dirige raudo hasta el domicilio de su cliente. Armijo estima que independiente del cliente en cuestión, el tiempo que demora en dicho trayecto es una variable aleatoria de distribución exponencial de tasa  $\gamma$ . Una vez en la casa del cliente Armijo cobra por su trabajo y vuelve hasta su local en taxi (considere que el tiempo de viaje en taxi es despreciable).

Armijo considera que el tiempo que transcurre entre la entrega de un traje del cliente  $i$  y el próximo llamado del mismo cliente es una variable aleatoria de distribución exponencial de tasa  $\lambda_i$ .

Mientras Armijo se encuentra trabajando en un traje existe la posibilidad que el otro cliente llame requiriendo un traje. Cuando esto sucede, Armijo toma nota de la orden y solo comienza a trabajar en ella una vez que vuelve de realizar la entrega del traje en el que trabaja.

Si el cliente  $i$  llama al local de Armijo mientras este se encuentra realizando una entrega, colgará e intentará nuevamente tras un tiempo aleatorio de distribución exponencial de tasa  $\lambda_i$ . Un cliente al que se le debe un traje no llamará por otro.

Armijo esta interesado en medir la calidad del servicio que esta entregando a sus clientes. Consiente de la dinámica Markoviana de su negocio a decidido utilizar sus conocimientos para tal fin.

1. (2,0 pts.) Modele el sistema de atención del Sastre como una cadena de Markov en tiempo continuo. Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionaria y escriba el sistema de ecuaciones que permitiría calcularla.
2. (1,5 pts) Considerando conocidas las probabilidades estacionarias entregue una expresión para el número de llamados perdidos en la tienda de Armijo en el largo plazo. Para esto siga los siguientes pasos:
  - Calcule el número de llamadas perdidas por el cliente 1 y el cliente 2 (por separado).
  - Calcule el número total de llamadas realizadas
  - Calcule la expresión requerida utilizando los puntos anteriores

Armijo ha realizado una encuesta de calidad de servicio a sus clientes. De ella se desprende que los clientes comprenden la ausencia de Armijo en el local, pero lo que no soportan es que sus trabajos sean demorados hasta después de la entrega de otro. Con esto en mente Armijo ha decidido implantar una nueva política de atención: Si al encontrarse trabajando en un traje es interrumpido por un llamado, tomara nota de él, pero no abandonara su local sino hasta haber terminado de confeccionar los trajes para sus 2 clientes. Así, realzará la entrega de ambos trajes de una sola vez, viajando desde su local hasta la casa del cliente que lleva esperando más, desde allí hasta la casa del otro cliente (para este fin considere que el tiempo de viaje entre el domicilio de un cliente y otro se distribuye exponencial de tasa  $\gamma$ ) y desde allí en taxi hasta su local (es decir, en un tiempo despreciable).

3. (1,5 pts.) Modele esta nueva situación como una cadena de Markov en tiempo continuo.
4. (0,5 pts.) En base al modelo de la parte 3, y suponiendo  $\lambda_1 = \lambda_2$  entregue una expresión para el número de llamados perdidos por el cliente 1 en la tienda de Armijo en el largo plazo. Considere conocidas las probabilidades estacionarias.
5. (0,5 pts.) En base al modelo de la parte 3, y suponiendo  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  calcule una expresión para número de llamados del cliente 1 que son perdidas. De ser necesario modifique la cadena de la parte anterior y considere conocidas las probabilidades estacionarias.

### Problema 3

El meson de atención en el aeropuerto de la aerolínea ARMIJO-AIR funciona de la siguiente manera: existen 2 tipos de clientes, los de primera clase (tipo 1) y los de clase económica (tipo 2). El proceso de llegada de los clientes es Poisson de tasa  $\lambda$ [clientes/hora]. Un cliente que llega al meson, independiente de todo lo demás, con probabilidad  $p$  es tipo 1 y con probabilidad  $(1 - p)$  es tipo 2.

La política de la empresa es siempre dar prioridad a los clientes tipo 1 en la atención, es decir, si un cliente tipo 1 llega al meson y encuentre a un cliente tipo 2 atendiéndose, el cliente tipo 2 debe cederle el servidor

al tipo 1 que llega. Solo se atienden clientes tipo 2 cuando no hay clientes tipo 1 presentes. Existe un solo servidor con tiempo de atención exponencial de tasa  $\mu$  independiente del tipo de cliente.

1. Modele la situación anterior como una cadena de Markov en tiempo continuo y justifique porque puede hacerlo. Generaliza estados si corresponde.
2. Escriba las ecuaciones de estado estacionario. Generalice si corresponde.
3. Determine el tiempo promedio que pasa un cliente tipo 1 en el meson de atención.
4. Determine el tiempo promedio que pasa un cliente tipo 2 en el meson de atención (espera + atención) y compárelo con el de los tipo 1.