

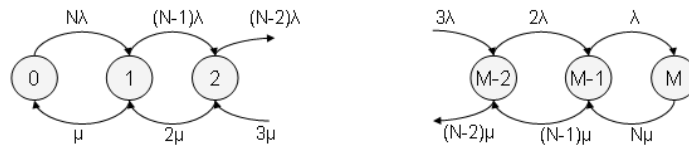


Solución Clase Auxiliar 10 de Noviembre, 2004

Repaso Control 3

**Problema 1**

1. Siguiendo el enunciado modelamos la cantidad de parejas bailando en un instante determinado. La cadena resultante es la siguiente:



2. En este caso basta con notar que la cadena es finita, por lo tanto tendrá ley de probabilidades estacionarias.

Respecto a las expresiones de las mismas utilizamos las formulas de los procesos de nacimiento y muerte. De esta forma tendremos que:

$$\begin{aligned}\pi_i &= \frac{M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \dots (M-i+1) \cdot \lambda^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 \\ &= M i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^M\end{aligned}$$

Entonces:

$$\pi_i = M i \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{M-i}$$

Donde reconocemos una distribución binomial de parámetros  $(M, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})$

3. El número promedio de parejas bailando simplemente es la esperanza de la binomial, es decir:

$$E[\text{Parejas bailando}] = M \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

4. Inmediatamente nos damos cuenta que si M es impar la probabilidad es 0. Si M es par, entonces:

$$P[\text{Igual número de parejas sentadas que bailando}] = M \frac{M}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{M}{2}} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{M}{2}}$$

5. La tasa media de entrada de parejas a la pista será:

$$\begin{aligned}
 Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot (M-i)\lambda \\
 &= \sum_{i=0}^M M i \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{M-i} \cdot (M-i)\lambda \\
 &= M\lambda - M\lambda \cdot \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \\
 &= M\lambda \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

6. La tasa media de salida de parejas de la pista será:

$$\begin{aligned}
 Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot i \cdot \mu \\
 &= \sum_{i=0}^M M i \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{M-i} \cdot i \cdot \mu \\
 &= M\mu \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

Claramente la tasa media de entrada a la pista es igual a la tasa media de salida de la pista. Si no no existiría estado estacionario.

## Problema 2

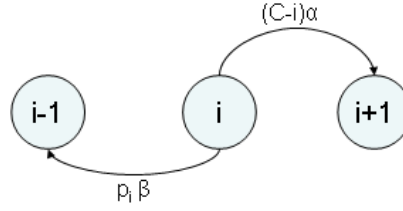
1. El tiempo que demora cada uno de los  $k$  empleados en llegar al local se distribuye exponencial de tasa  $\alpha$ . El tiempo del primero de estos que llega sigue la distribución del mínimo de  $k$  exponenciales de tasa  $\alpha$ . Sabemos que esta distribución es exponencial de tasa  $k \cdot \alpha$ .
2. Mientras haya  $i$  autos en la concesionaria la probabilidad de compra de un cliente será  $p_i$ . Utilizando división de procesos de Poisson vemos que el proceso de compra de autos es Poisson de tasa  $\beta \cdot p_i$ . Entonces el tiempo entre compras se distribuye exponencial de tasa  $\beta \cdot p_i$ .
3. Modelamos los estados como el número de automóviles en el local. La cadena queda de la siguiente forma:



Vemos que la cadena tiene la estructura de un proceso de nacimiento y muerte.

Para definir la cadena completamente debemos especificar las tasas de transición entre estados. Cuando hay  $i$  autos en la concesionaria habrán  $C-i$  empleados conduciendo automóviles al local. por lo tanto la tasa de transición al estado  $i+1$  será  $(C-i) \cdot \alpha$ . En la misma situación la tasa de compra será  $\beta \cdot p_i$  (parte 2). Con esto las tasa quedan de la siguiente forma.

En la figura anterior debemos obviar las transiciones desde  $C$  a  $C+1$  y desde  $0$  a  $-1$  (no existen).



4. La cadena es irreducible y finita. Condición suficiente.

Para calcular las probabilidades estacionarias utilizamos las formulas de procesos de nacimiento y muerte.

$$\pi_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (C-j) \cdot \alpha}{\prod_{j=1}^i \frac{j(C-j+1)}{(j+1) \cdot C} \cdot \beta} \cdot \pi_0 = \left( \frac{\alpha \cdot C}{\beta} \right)^i \cdot (i+1) \cdot \pi_0$$

Sea  $\rho = \frac{\alpha \cdot C}{\beta}$ . Entonces:

$$\pi_0^{-1} = \sum_{i=0}^C (i+1) \cdot \rho^i = \frac{1 - \rho^{C+2}}{(1-\rho)^2} + \frac{1 - (C+2)\rho^{C+1}}{1-\rho}$$

5. Supondremos conocidas las probabilidades estacionarias.

En este caso la tasa efectiva de entrada de autos al sistema es (en el largo plazo):

$$\lambda = \sum_{i=0}^C (C-i) \cdot \alpha \cdot \pi_i = \sum_{i=0}^C (C-i) \cdot \alpha \cdot \frac{\rho^i \cdot (i+1)}{\frac{1-\rho^{C+2}}{(1-\rho)^2} + \frac{1-(C+2)\rho^{C+1}}{1-\rho}}$$

La tasa efectiva de salida de autos del sistema es:

$$\mu = \sum_{i=0}^C \frac{i \cdot (C-i)}{(i+1) \cdot C} \cdot \beta \cdot \pi_i = \frac{i \cdot (C-i)}{(i+1) \cdot C} \cdot \beta \cdot \frac{\rho^i \cdot (i+1)}{\frac{1-\rho^{C+2}}{(1-\rho)^2} + \frac{1-(C+2)\rho^{C+1}}{1-\rho}}$$

Ambas tasas deben ser iguales, de lo contrario el sistema acumularía infinitos autos (lo que no ocurre dada la capacidad C) o quedaría debiendo autos (lo que no ocurre dado que no se venden autos cuando no quedan).

6. Mientras nos encontramos en el estado  $i$  los empleados llegan a la tienda con tasa  $(C-i) \cdot \alpha$  por lo que el costo esperado por unidad de tiempo es simplemente:

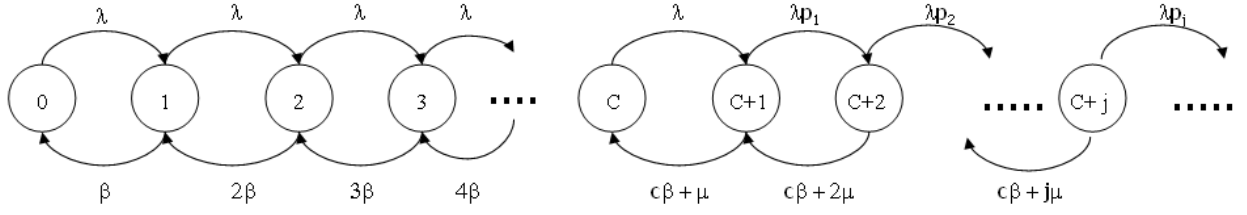
$$(C-i) \cdot \alpha \cdot X$$

Ahora si ajustamos este costo considerando que no me encuentro todo la unidad de tiempo en un estado, sino que solo estoy una fracción  $\pi_i$  (en términos esperados, en el largo plazo), tendremos que:

$$E[\text{Costo}] = \sum_{i=0}^C (C-i) \cdot \alpha \cdot X \cdot \pi_i = \lambda \cdot X$$

### Problema 3

- a) Como es costumbre modelamos el número de personas en el sistema. La cadena toma la siguiente forma:



b) Al igual que en una cadena M/M/∞ solo necesitamos que  $\mu$  sea positivo. Las expresiones necesarias para calcularlas son las siguientes:

$$\pi_i = \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i \cdot \pi_0 \quad , \quad \forall i \leq C$$

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu} \pi_0 \quad \forall i > C$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_i = 0^C \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i + \sum_{i=C+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu}}$$

c) Supondremos conocidos los valores de las probabilidades estacionarias.

- 1) Razonamos calculando casos favorables sobre casos totales. Claramente los casos totales están dados por la cantidad de clientes que llegan en una hora ( $\lambda$ ). Los casos favorables son los siguientes:

$$C.F. = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot \lambda \cdot (1 - P_{i-C})$$

Entonces:

$$E[\% \text{ Clientes que no entran}] = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C})$$

- 2) Considerando a todos los clientes:  $\lambda$  (sin comentarios)  
Sin considerar a los que entran:  $\lambda \cdot (1 - \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C}))$ .
- 3) Condicionamos sobre el estado del sistema al momento en que comenzamos a observar. Así, la probabilidad de que la próxima persona en salir sea por aburrimiento es la siguiente:

$$P_A = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \cdot P_A^i$$

Debemos calcular  $P_A^i$ , la probabilidad de que salga primero un tipo aburrido antes de uno ya atendido, dado que el sistema tiene  $i$  entidades.

Vemos que, condicionando sobre el primer evento, tendremos lo siguiente:

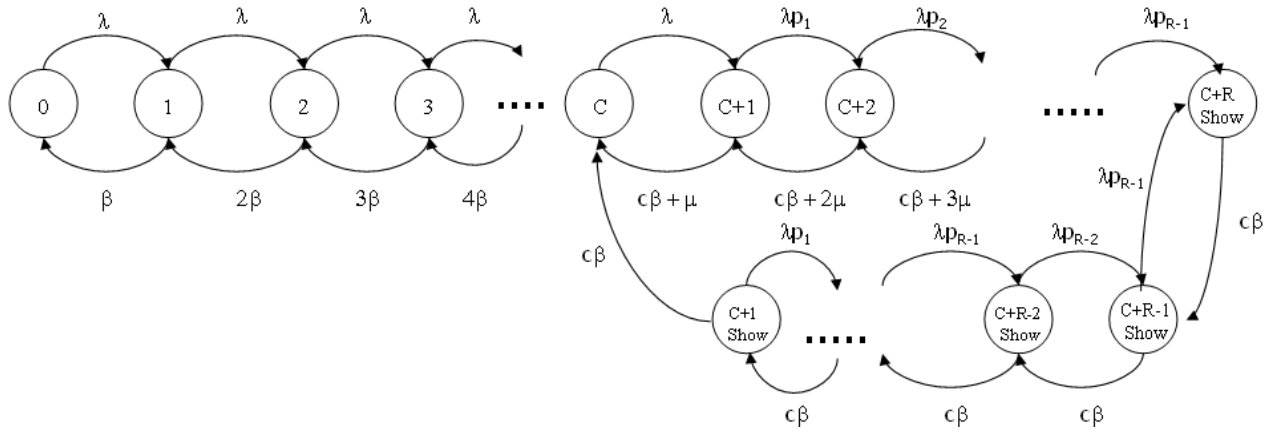
$$P_A^i = \frac{(i-C)\mu}{(i-C) \cdot \mu + C\beta + \lambda P_{C-i}} + \frac{\lambda \cdot P_{i-C}}{(i-C) \cdot \mu + C\beta + \lambda P_{C-i}} \cdot P_A^{i+1} \quad \forall i \geq C$$

$$P_A^i = \frac{\lambda}{C\beta + \lambda} \cdot P_A^{i+1} \quad \forall i < C$$

Para encontrar la probabilidad buscada debemos resolver este sistema recursivo.

d) La nueva situación puede ser modelada de la siguiente forma:

Acá hemos diferenciado explícitamente los estados en los cuales el guardia se encuentra en el escenario.



Dudas, consultas y comentarios a  
[dyung@ing.uchile.cl](mailto:dyung@ing.uchile.cl)