



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Denis Sauré, Rafael Epstein.
Aux : C. Berner, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 10 de Noviembre, 2004
Repaso Control 3

Problema 1

A una fiesta muy particular asisten M parejas. Cada pareja toma la decisión de ir a la pista de baile independiente de las demás. El tiempo que pasa hasta que cada pareja se decide a salir a bailar es una variable aleatoria de distribución exponencial de parámetro $\lambda(1/\text{min})$. Por otro lado, el tiempo que permanece cada pareja bailando es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}(\text{min})$.

Cuando una pareja deja de bailar inicia un nuevo proceso para decidir si salir a la pista nuevamente (con la misma distribución de probabilidades), y así sucesivamente.

Por último suponga que la capacidad de la pista es suficiente, como para que todas las parejas este bailando al mismo tiempo, y que la fiesta dura por mucho tiempo.

1. (2,0 puntos) Modele la cantidad de parejas bailando en cualquier instante como una Cadena de Markov en tiempo Continuo.
2. (2,0 puntos) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y encuentre las expresiones que le permitan calcularlas.
3. En función de las probabilidades estacionarias responda:
 - a) (0,5 puntos) El número promedio de parejas que se encuentran en la pista en un instante cualquiera.
 - b) (0,5 puntos) La probabilidad de que exista igual número de parejas baliando y sentadas en un instante cualquiera.
 - c) (1,0 puntos) La tasa media de ingreso de parejas a la pista.
 - d) (1,0 puntos) La tasa media de salida de parejas desde la pista de baile.

Problema 2

Armijo Catalán es el dueño de una concesionaria de automóviles de última generación, en cuyas dependencias caben a lo más C unidades de estos bolidos. En esta ocasión Armijo centrará su atención en la política de mantención del inventario, y no en los precios que cobrará.

Tras noches de insomnio, Armijo determino la siguiente política: cada vez que realice una venta, ordenará a su proveedor un nuevo automóvil. Dicho proveedor cada vez que recibe un pedido inmediatamente selecciona a uno de sus múltiples empleados para que conduzca el auto hasta la concesionaria. Independiente del conductor el tiempo de viaje entre la bodega del proveedor y el local de Armijo se comporta como una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\alpha}[\text{horas}]$

Por otro lado la llegada de clientes a la concesionaria se puede modelar como un proceso de Poisson de tasa $\beta[\text{Clientes/hora}]$. No todos los clientes compran, sino que la probabilidad de compra de un cliente esta directamente relacionada con la cantidad de automóviles presentes en el local. Sea p_i la probabilidad de compra cuando hay i autos en la concesionaria.

Suponga que inicialmente se cuenta con C autos en la concesionaria. Al respecto responda las siguientes preguntas:

1. (0,5 ptos.) Si en un instante hay k empleados manejando cada uno un automóvil hacia el local de Armijo, ¿como se distribuye el tiempo hasta que el primero de ellos llega a su destino?
2. (1,0 ptos.) Mientras haya i autos en la concesionaria, ¿como se distribuye el tiempo hasta que se vende el próximo automóvil?
3. (0,5 ptos.) Utilizando las partes anteriores modele el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo ¹
4. (2,0 ptos.) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias. Considerando que las probabilidades de compra de los clientes toman la siguiente forma:

$$p_i = \frac{i \cdot (C - i + 1)}{(i + 1) \cdot C}$$

calcule las probabilidades estacionarias.

5. (1,0 ptos.) Encuentre expresiones para la tasa efectiva de venta de automóviles y para la tasa efectiva de llegada de automóviles. ¿Que relación existe entre ellas?
6. (1,0 ptos.) Suponiendo que Armijo entrega una pequeña propina de $\$X$ a cada conductor que llega hasta su local, ¿Cual es el costo esperado por unidad de tiempo de la entrega de propinas?

Problema 3

Don King, nuevamente requiere de nuestra ayuda para estudiar el sistema de atención de una de sus sucursales bancarias.

El banco cuenta con C cajas en paralelo y opera con una cola única de capacidad ilimitada. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora]. Si al llegar una persona al banco, hay j clientes en la fila, entra al sistema con probabilidad p_j , y en caso contrario, se va ($P_0=1$).

Una vez en la cola, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que llega al sistema hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ [horas].

Además se sabe que cada la atención de cada uno de los cajeros, es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$ [horas].

- a) (2.0 pts) Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en tiempo continuo.
- b) (1.5 pts) Indique la condición de existencia de probabilidades estacionarias y entregue expresiones genéricas que le permitirían calcularlas.
- c) Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, responda las siguiente preguntas:
 - 1) (0.5 pts) ¿Qué fracción de los clientes, que en una hora llegan al sistema, deciden no ponerse en la cola y retirarse sin entrar al banco?
 - 2) (1.0 pts) ¿Cuál es la tasa promedio de salida de personas del sistema (tanto por atención como por aburrimiento)?
 - 3) (1.0 pts) En un instante cualquiera del tiempo en el largo plazo, ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima persona que salga del sistema lo haga por que se aburrió ?

BONUS (1.0 PTS)

Ahora suponga que la capacidad para personas en cola de igual a R (Asuma $p_R=0$). En el momento que el sistema se llena, Don Güilly, guardia del local, ágilmente se sube a un improvisado escenario dispuesto en el hall del banco, ha realizar una atrevida performance.

Según Don King, cuando el guardia est actuando, inhibe cualquier señal de aburrimineto por parte de los clientes. Don Güilly mantiene su show, mientras existan personas en cola.

Modele esta nueva situación como una Cadena de Markov en tiempo continuo.

¹Hint: recuerde que el CTP se trata de procesos de nacimiento y muerte.