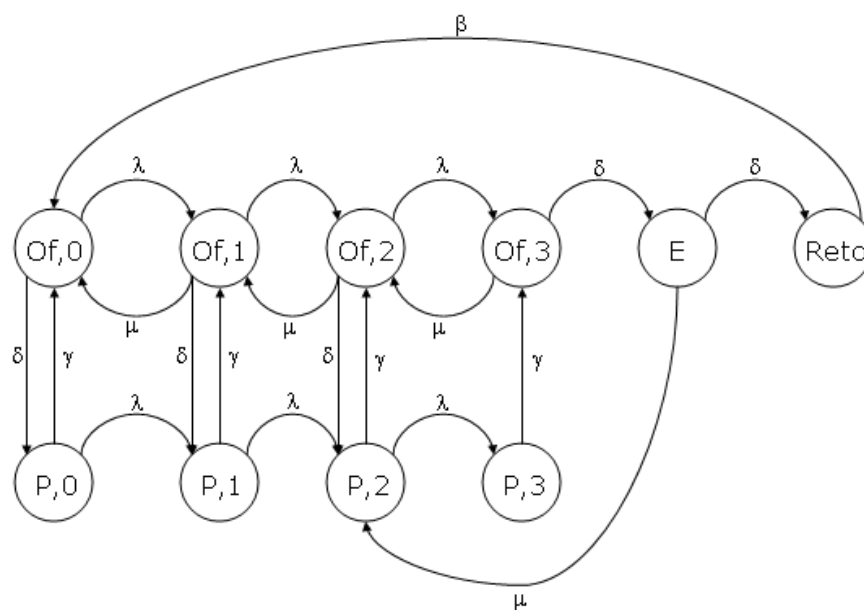




Solución Clase Auxiliar 27 de Octubre, 2004  
Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

**Problema 1**

1. Para modelar esta situación como una cadena de Markov debemos considerar la localización de Armijo, ya que solo si se encuentra trabajando podrá responder correo, pero el correo le llegará en cualquier localización. Además debemos distinguir un estado especial donde Armijo tendrá tres mails acumulados y un llamado perdido por parte de su novia, esto por que solo desde aquí se podrá viajar a un estado de reto o al estado donde esta con su novia y tiene 2 mails. Es importante notar que mientras esta con su novia pueden llegarle mails por lo que no nos sirve un estado que solo nos diga si esta con su novia, adicionalmente nos debe entregar información acerca de la carga de trabajo acumulada. De acuerdo a esto la cadena de Markov toma la siguiente forma:



2. Estamos frente a una cadena finita, por lo que definitivamente existirán probabilidades estacionarias (aquí no tiene sentido hablar de periodos de estados o clases, por lo que justificaciones del tipo "existe una única clase recurrente aperiódica" están malas)

Las ecuaciones que determinan el valor de las probabilidades estacionarias son las siguientes:

$$\begin{aligned}\pi_{Of,0} \cdot (\lambda + \delta) &= \pi_{Reto} \cdot \beta + \pi_{Of,1} \cdot \mu + \pi_{P,0} \cdot \gamma \\ \pi_{Of,1} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,0} \cdot \lambda + \pi_{Of,2} \cdot \mu + \pi_{P,1} \cdot \gamma \\ \pi_{Of,2} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,1} \cdot \lambda + \pi_{Of,3} \cdot \mu + \pi_{P,2} \cdot \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{Of,3} \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,2} \cdot \lambda + \pi_{P,3} \cdot \gamma \\
\pi_{P,0} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,0} \cdot \delta \\
\pi_{P,1} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,1} \cdot \delta + \pi_{P,0} \cdot \lambda \\
\pi_{P,2} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,2} \cdot \delta + \pi_{P,1} \cdot \lambda + \pi_E \cdot \mu \\
\pi_{P,3} \cdot \gamma &= \pi_{P,2} \cdot \lambda \\
\pi_E \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,3} \cdot \delta \\
\pi_{Reto} \cdot \beta &= \pi_E \cdot \delta \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

3. Supongamos que estamos durante toda una hora en el estado de reto. La tasa de salida del estado es  $\beta$ , por lo que en términos esperados habrán  $\beta$  retos durante esa hora. Sin embargo dado que no estoy todo el tiempo en ese estado debo ponderar por el tiempo que efectivamente estoy en ese estado. Entonces:

$$E[\text{Retos/hora}] = \pi_{Reto} \cdot \beta$$

Otra respuesta valida es suponer que estamos durante una hora en el estado  $E$ . Si fuese así habrían  $\delta$  retos por hora. Entonces análogamente al caso anterior la respuesta sería:

$$E[\text{Retos/hora}] = \pi_E \cdot \delta$$

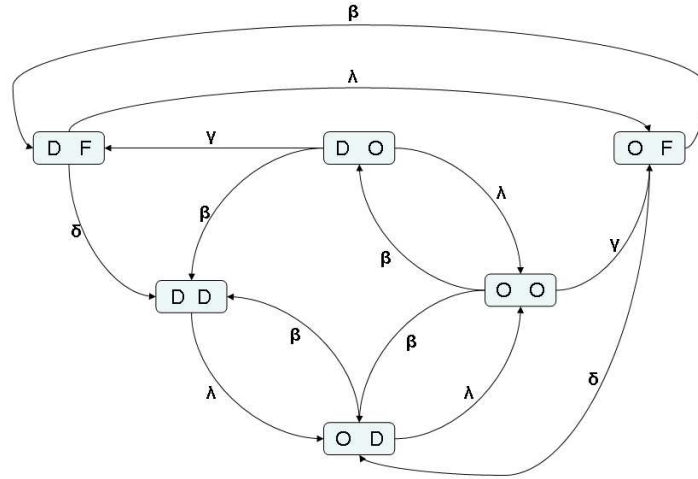
Ambas respuestas son equivalentes (basta revisar las ecuaciones de la parte 2).

4. La respuesta es simplemente

$$\pi_{Of,0}$$

## Problema 2

1. La cadena asociada al problema se muestra en la siguiente página. En esta cadena, la primera coorde-



nada indica el estado de ocupación del equipo de alta calidad y la segunda el estado del equipo de baja calidad. Notamos que debemos almacenar información acerca del estado de cada equipo por separado. ¿Por qué?

La cadena ilustrada es irreducible y finita, por lo que podemos asegurar que existirá una ley de probabilidades estacionarias. Las ecuaciones necesarias para su cálculo son las siguientes (ecuaciones de balance):

$$\begin{aligned}
\pi_{DD} \cdot \lambda &= \pi_{OD} \cdot \beta + \pi_{DO} \cdot \beta + \pi_{DF} \cdot \delta \\
\pi_{OD} \cdot (\lambda + \beta) &= \pi_{DD} \cdot \lambda + \pi_{OO} \cdot \beta + \pi_{OF} \cdot \delta \\
\pi_{OO} \cdot (2 \cdot \beta + \gamma) &= \pi_{OD} \cdot \lambda + \pi_{DO} \cdot \lambda \\
\pi_{DO} \cdot (\lambda + \beta + \gamma) &= \pi_{OO} \cdot \beta \\
\pi_{OF} \cdot (\delta + \beta) &= \pi_{DF} \cdot \lambda + \pi_{OO} \cdot \gamma \\
\pi_{DF} \cdot (\lambda + \delta) &= \pi_{OF} \cdot \beta + \pi_{DO} \cdot \gamma \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

2. Para responder esta pregunta debemos identificar los estados en los cuales se rechazan solicitudes, interpretar las probabilidades estacionarias como fracción en el largo plazo que el sistema se encuentra en un estado y identificar la tasa efectiva de rechazos para cada estado. Con esto tendremos que:

$$E[\text{Rechazos}] = \pi_{OO} \cdot \lambda + \pi_{OF} \cdot \lambda$$

3. Nuevamente interpretamos las probabilidades estacionarias como fracción del tiempo que se permanece en un estado en el largo plazo. Entonces:

$$\text{Tasa equipo alta calidad} = \pi_{OD} + \pi_{OO} + \pi_{OF}$$

y

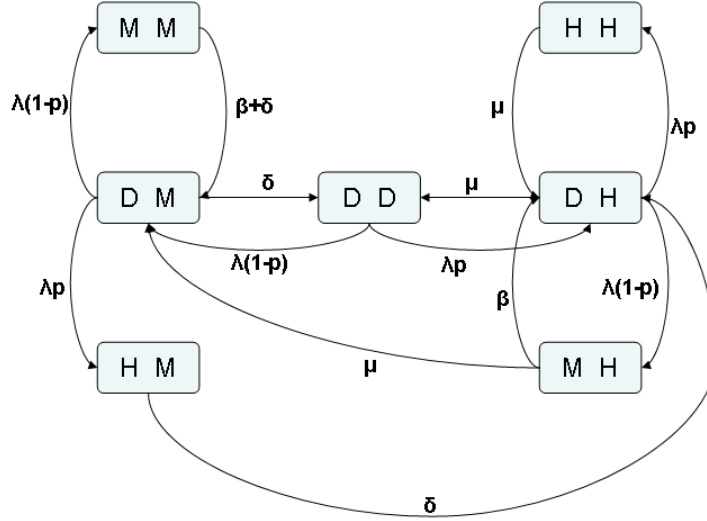
$$\text{Tasa equipo baja calidad} = \pi_{DO} + \pi_{OO}$$

4. Independiente del estado del sistema la distribución del tiempo de falla y de duración de la presentación se mantienen invariantes. Entonces la pregunta es ¿cuál es la probabilidad que el valor de una variable aleatoria de distribución exponencial de parámetro  $\beta$  sea menor al valor de una de distribución exponencial de parámetro  $\gamma$ . Llamando a esta probabilidad  $P$  tendremos que:

$$P = \frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

### Problema 3

1. La cadena de Markov queda de la siguiente forma:



2. (1.0 pts) Tenemos una cadena irreducible y finita  $\rightarrow$  Existen probabilidades estacionarias.  
Para encontrarlas debemos plantear el sistema de ecuaciones de balance en los nodos. El sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \pi_{DD} \cdot \lambda &= \pi_{DM} \cdot \gamma + \pi_{DH} \cdot \mu \\
 \pi_{DM} \cdot (\lambda + \gamma) &= \pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) + \pi_{DD} \cdot \lambda(1 - p) + \pi_{MH} \cdot \mu \\
 \pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) &= \pi_{DM} \cdot \lambda(1 - p) \\
 \pi_{HM} \cdot \gamma &= \pi_{DM} \cdot \lambda p \\
 \pi_{DH} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{HH} \cdot \mu + \pi_{DD} \cdot \lambda p + \pi_{MH} \cdot \beta + \pi_{HM} \cdot \gamma \\
 \pi_{HH} \cdot \mu &= \pi_{DH} \cdot \lambda p \\
 \pi_{MH} \cdot (\beta + \mu) &= \pi_{DH} \cdot \lambda(1 - p) \\
 \sum_i \pi_i &= 1
 \end{aligned}$$

3. Consideramos conocidas las probabilidades estacionarias:

- a) Primero identificamos los estados en los cuales, de llegar un alumno, se deberá retirar por que encuentra ambos lugares ocupados. Entonces, dado que en cada uno de estos estados la tasa de llegada de alumnos es la misma ( $\lambda$ ), tendremos que:

$$E[\text{Alumnos perdidos}] = \lambda \cdot (\pi_{MM} + \pi_{HH} + \pi_{HM} + \pi_{MH})$$

- b) Si un hombre llega y encuentra un lugar, la esperanza del tiempo de espera dependerá del estado en el que encuentra al sistema. De esta forma:

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DD}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot 0 + \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

En esta parte algunos alumnos consideraran calcular el tiempo total en el sistema. Suponiendo que el enunciado no fue del todo claro <sup>1</sup> la expresión anterior debe ser reemplazada por la siguiente:

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DD}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot 0 + \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\mu}$$

- c) Si la persona que esta antes que ella (atendiendose) es un hombre, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media  $\frac{1}{\mu}$  sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media  $\frac{1}{\beta}$ . Esta probabilidad es:

$$\frac{\beta}{\beta + \mu}$$

Si la persona que esta antes que ella (atendiendose) es una mujer, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media  $\frac{1}{\gamma}$  sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media  $\frac{1}{\beta}$ . Esta probabilidad es:

$$\frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

Para calcular la probabilidad solo debemos ponderar por la probabilidad de encontrar al sistema en un estado en particular. Aquí existen 2 posibles interpretaciones del enunciado<sup>2</sup>. La primera es que solamente debemos contabilizar los casos donde una mujer tuvo que esperar. En este caso la expresión buscada es la siguiente:

$$E[\text{Mujer indignada}] = \frac{\pi_{MM}}{\pi_{MM} + \pi_{MH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \gamma} + \frac{\pi_{MH}}{\pi_{MM} + \pi_{MH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \mu}$$

Esto es por que solamente en los estados  $\{MH\}$  y  $\{MM\}$  una mujer tuvo que esperar por el servicio.

La segunda interpretación es considerar a todas las mujeres que entran al sistema. En este caso debemos considerar también el caso donde una mujer ingresa a la oficina vacía. Aca ocupamos casos favorables partidos por totales.

$$E[\text{Mujer indignada}] = \frac{\beta \cdot [\pi_{MH} + \pi_{MM}]}{(1-p)\lambda \cdot [\pi_{DD} + \pi_{DH} + \pi_{DM}]}$$

Dudas, consultas y comentarios a  
dyung@ing.uchile.cl

---

<sup>1</sup>Consideramos esta posibilidad dado que la palabra HASTA esta sujeta a multiples interpretaciones

<sup>2</sup>Aquí reconocemos nuestra falta de claridad