



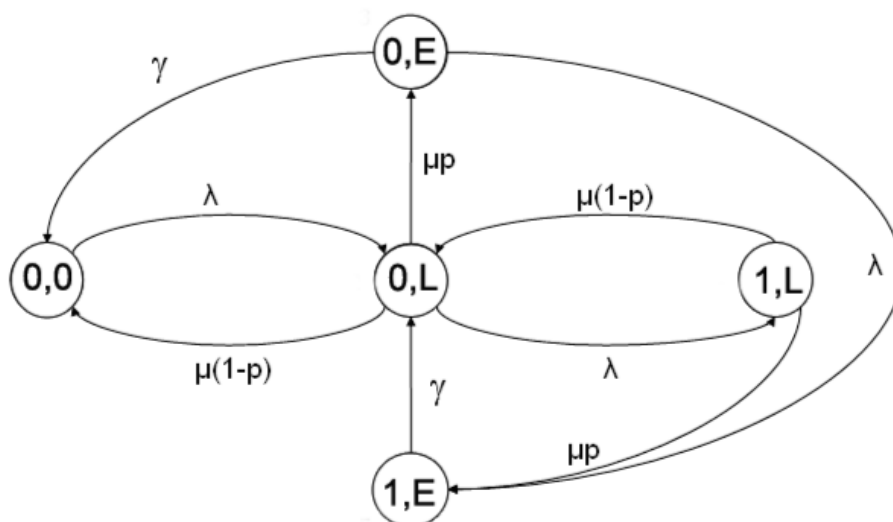
Solución CTP 4

Martes 26 de Octubre de 2004

- La cadena queda de la siguiente forma, en que los estados (i, j) almacenan información sobre el número de autos en cola y la ocupación de las trabajadoras del local,

$$i \in \{0, 1\}$$

$$j \in \{0(\text{desocupadas}), L(\text{lavando}), E(\text{encerando})\}$$



El por que se puede modelar como una cadena de Markov tiene que ver con la distribución de los tiempos entre transiciones y la pérdida de memoria de la distribución exponencial. Las ecuaciones de estado estacionario son bastante parecidas a ecuaciones de conservación de Flujo.

$$\begin{aligned} \pi_{0,0}\lambda &= \Pi_{0,L}\mu(1-p) + \Pi_{0,E}\gamma \\ \Pi_{0,L}(\mu + \lambda) &= \Pi_{0,0}\lambda + \Pi_{1,E}\gamma + \Pi_{1,L}\mu(1-p) \\ \Pi_{0,E}(\gamma + \lambda) &= \Pi_{0,L}\mu p \\ \Pi_{1,L}\mu &= \Pi_{0,L}\lambda \\ \Pi_{1,E}\gamma &= \Pi_{1,L}\mu p + \Pi_{0,E}\lambda \\ \sum_{i \in \text{Estados}} \Pi_i &= 1 \end{aligned}$$

- En el largo plazo del total de clientes que llegan al sistema, no podrán entrar los que lo encuentren en los estados $(1,L)$ y $(1,E)$, en los cuales hay un automóvil en cola. Si interpretamos las probabilidades estacionarias como la fracción del tiempo que (en el largo plazo) el sistema se encuentra en un estado, entonces la fracción de clientes que no podrán lavar su auto en el CarWash será:

$$\text{Fracción} = \Pi_{1,L} + \Pi_{1,E}$$

3. Debemos distinguir los siguientes tres casos:

1.- El local está vacío (0,0): en este caso el cliente se demora $\frac{1}{\mu}$ ya que sólo desea lavar su bolido.

2.- Encuentra un automóvil siendo lavado (0,L), en este caso demorará en promedio $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} + p \cdot \frac{1}{\gamma}$ (con probabilidad p debe esperar que el auto sea encerado).

3.- Encuentra un automóvil siendo encerado (0,E), en este caso sólo deberá esperar que enceren el auto que estaba siendo atendido cuando llegó y que laven el suyo, por lo que demorará, en promedio, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\mu}$ en salir del local.

Ponderando por las probabilidades de ocurrencia de cada caso se obtiene:

$$E(\text{Espera}) = \frac{1}{\Pi_{0,0} + \Pi_{0,L} + \Pi_{0,E}} \cdot \left[\frac{1}{\mu} \cdot \Pi_{0,0} + \left[\frac{2}{\mu} + p \cdot \frac{1}{\gamma} \right] \cdot \Pi_{0,L} + \left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right] \cdot \Pi_{0,E} \right]$$

4. La tasa efectiva de llegadas de clientes al Carwash es

$$\lambda \cdot (\Pi_{0,0} + \Pi_{0,L} + \Pi_{0,E})$$

Ahora, si filtramos el proceso de llegada tendremos que los clientes que sólo lavan sus bolidos y pagan \$ L llegan con tasa:

$$\lambda \cdot (\Pi_{0,0} + \Pi_{0,L} + \Pi_{0,E}) \cdot (1 - p)$$

y los que también enceran sus automóviles y pagan \$ LE llegan con tasa:

$$\lambda \cdot (\Pi_{0,0} + \Pi_{0,L} + \Pi_{0,E}) \cdot p$$

Además autos que no pueden ser atendidos y cuestan \$ D al CarWash, llegan con tasa:

$$\lambda \cdot (\Pi_{1,L} + \Pi_{1,E})$$

Entonces los beneficios esperados por unidad de tiempo en el largo plazo serán (considerando el sueldo de las 5 señoritas):

$$E[\text{Beneficios}] = \lambda \cdot (\Pi_{0,0} + \Pi_{0,L} + \Pi_{0,E}) \cdot (1 - p) \cdot \$L + \lambda \cdot (\Pi_{0,0} + \Pi_{0,L} + \Pi_{0,E}) \cdot p \cdot \$LE - \lambda \cdot (\Pi_{1,L} + \Pi_{1,E}) \cdot \$D - \$5 \cdot S$$

Dudas, consultas y comentarios a
dyung@ing.uchile.cl