



Pauta Control 2

Problema 1

1. Es importante percatarse de que lo que se debe modelar en esta parte de la pregunta son el número de personas dentro del estadio en cada partido. En este sentido, pueden llegar hasta infinitas personas a un partido, pero solo entrarán a verlo un máximo de N . El número de asistentes puede ser modelado a través de una cadena de Markov, debido a que el número de asistentes (adultos y niños) en un partido sólo dependerá de cuantos adultos y niños entraron al estadio en el partido anterior (esta dependencia esta en la tasa de llegada de adultos λ_l) y la probabilidad P_m .

Para modelar la cadena cada estado debe tener la información necesaria: El número de niños y de adultos. Así cada estado será de la forma (A, B) , donde A =número de niños dentro del estadio y B = número de adultos dentro del estadio. Como la cadena conecta demasiados estados y plantea muchas combinaciones es que no tiene mucho sentido dibujarla. Sin embargo, podemos generalizar las probabilidades de transición:

Suponemos que estamos en el estado (k, l) y queremos pasar al (i, j) entonces :

$$P_{k,l \rightarrow i,j} = \frac{e^{-\lambda_l} \lambda_l^j}{j!} \cdot \binom{j}{i} P_k^i (1 - P_k)^{j-i} \quad \text{si } i + j < N$$

$$P_{k,l \rightarrow i,j} = \sum_{w=\frac{N}{2}}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_l} \lambda_l^w}{w!} \cdot \sum_{x=\frac{N}{2}}^w \binom{w}{x} P_k^x (1 - P_k)^{w-x} \quad \text{si } i + j = N \quad \text{o bien } i = j = \frac{N}{2}$$

$$P_{k,l \rightarrow i,j} = \sum_{w=j}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_l} \lambda_l^w}{w!} \cdot \binom{w}{i} P_k^i (1 - P_k)^{w-i} \quad \text{si } i \neq j; \quad i < j$$

$$P_{k,l \rightarrow i,j} = 0 \quad \text{si } i > j \quad \vee \quad i + j > N.$$

El primero, es el caso en que llega un total de personas que no copará el estadio, por lo que no quedará nadie fuera. Es por esto que se asume llegan j adultos y se multiplica por la probabilidad que lleguen i de ellos con un niño.

El segundo es el caso en que llegan más de $\frac{N}{2}$ adultos con más de $\frac{N}{2}$ niños, con lo que así entrarán las mismas cantidades para los distintos tipos de personas.

El tercer caso es que lleguen más de j adultos, pero que lleguen exactamente i niños.

Sabemos que existirá una conexión entre cada par de estados. En este sentido sólo basta saber que desde todos los estados puedo conectarme al estado $(0;0)$ y desde este último hacia cualquier otro estado. Es por esto, que todos los estados están *comunicados* entre sí (en terminos de *comunicación*, no de transición) y que por ende hay solo una gran clase recurrente aperiódica. Es fácil chequear esta última propiedad viendo que de cada estado existe una probabilidad mayor a cero de transición hacia si mismo.

Con lo anterior llegamos a que el sistema admite una ley de probabilidades estacionarias, y que por ende, su ley estable es única y equivalente a la ley estacionaria.

2. Considerando que el sistema no es más que una cadena compuesta por una sola clase recurrente y aperiódica, sabemos que existe una ley de probabilidades estacionarias. Se debe considerar además, que debido a que es uno de los últimos partidos, el sistema se encuentra en estado estacionario. Dado lo anterior, se tiene:

$$E[asistentes] = \sum_{k,l} \pi_{k,l} \cdot (k + l)$$

donde la suma es sobre todos los pares (k, l) tal que:

$$(k, l) \in \{(x, y) / x \leq y; x + y \leq N\}$$

3. En esta parte debemos considerar que el sistema está en estado estacionario y que entran exactamente w niños. Ahora, como existen varios estados en la cadena que consideran la entrada de w niños, siendo $w \leq \frac{N}{2}$, se tiene:

$$E[utilidad] = \frac{\sum_l \pi_{w,l} \cdot (w \cdot P_N + l \cdot P_A)}{\sum_l \pi_{w,l}}$$

Es necesario normalizar, debido a que no se consideran los estados totales como la suma de todos los estados de la cadena, si no solo los que consideran w niños.

4. En esta parte se debe hacer una nueva cadena, en la cual cada estado guarde dos tipos de información, la vilonecía y el resultado de un partido dado. Así, los estados serán de la forma (C, D) donde C será el resultado obtenido por el equipo en un partido dado (ganar, perder o empatar) y D será el nivel de violencia visto en ese partido.

Tampoco tiene mucho sentido dibujar esta cadena de $3 \cdot F$ estados, ya que hay probabilidades de transición mayores que cero que conectan a cada estado con todos los demás. Es decir, todos los estados se conectan en transición con todos los estados y por ende todos los estados están *comunicados* entre sí. Con esta información podemos decir que si se desea pasar desde un estado (k, l) a un estado (i, j) :

$$P_{k,l \rightarrow i,j} = q_j(k) \cdot r_i(l) \quad \forall k, i \in \{ganar, perder, empatar\}; \quad \forall l, j = 1, 2, \dots, F$$

Vale destacar, que debido a que todos los estados están comunicados entre sí, es que se puede decir que el sistema presenta solo una gran clase recurrente. además debido a que cada estado se conecta en probabilidad con si mismo, es que llegamos a concluir que esta única clase recurrente es además aperiódica y que por ende acepta una ley de probabilidades estacionarias.

5. De las partes anteriores sabemos que la asistencia a los estadios dependen de los niños y adultos en el partido anterior. si se desea modelar ahora que éstos dependan además de la violencia y del resultado del equipo obtenido en el partido anterior, esto es perfectamente modelable mediante una cadena de markov en que cada estado posea 4 tipos de información: el número de niños en el partido, el número de adultos, el nivel de violencia y resultado obtenido por el equipo en el partido anterior. Además habría que considerar que ahora la asistencia al estadio depende de la violencia y el resultado al partido anterior por lo que tendría sentido hacer algo como redefinir λ_l y P_m como sigue:

- λ_{lvz} = Tasa de llegada de adultos a ver un partido, dado que el partido anterior entraron al estadio l adultos, se produjo un resultado z y hubo un nivel de violencia v .
- P_{mvz} = Probabilidad de que un adulto en particular llegue acompañado de un niño al estadio, dado que el partido anterior entraron al estadio m niños, se produjo un resultado z y hubo un nivel de violencia v .

Las dos proposiciones anteriores son válidas si $l+m \leq N$; $\forall z \in \{ganar, perder, empatar\}$; $\forall v = 1, 2, \dots, F$.

Realizado lo anterior, es que se declara la dependencia de la asistencia al estadio con respecto al nivel de violencia y el resultado anterior. Así es que se puede decir que si estamos en el estado (k, l, m, n) y queremos pasar al estado (i, j, x, y) donde cada estado tiene la información ordenada de la forma (número de niños en un partido, número de adultos en un partido, resultado del partido, violencia en el partido) lo siguiente:

$$P_{k,l,m,n \rightarrow i,j,x,y} = q_y(m) \cdot r_x(n) \cdot \frac{e^{-\lambda_{lm}} \lambda_{lm}^j}{j!} \cdot \binom{j}{i} P_{km}^i (1 - P_{km})^{j-i}$$

si $i + j < N$; $\forall m, x \in \{ganar, perder, empatar\}$; $\forall n, y = 1, 2, \dots, F$

Vale destacar que es incorrecto pensar que los partidos son independientes de la violencia y resultado del partido anterior. En este sentido sería erróneo declarar:

$$P_{k,l,m,n \rightarrow i,j,x,y} = q_y(m) \cdot r_x(n) \cdot \frac{e^{-\lambda_l} \lambda_l^j}{j!} \cdot \binom{j}{i} P_k^i (1 - P_k)^{j-i}$$

ya que no se declara la dependencia antes descrita.

Vale destacar que hay dos casos más de probabilidades de transición, pero para conocerlos, basta multiplicar $q_y(m) \cdot r_x(n)$ por las otras probabilidades de transición vistas en la parte 1, poniéndose en los mismos casos sobre los valores que pueden tomar las variables k, l, i, j , junto con incorporar las nuevas definiciones para λ y P .

En cuanto a las clases, debido al tipo de conexión es que nuevamente nos encontramos con una cadena con todos los estados comunicados entre si y que poseen una probabilidad de transición hacia ellos mismos mayor a cero, por lo que esta gran clase recurrente es además aperiódica, por lo que la cadena es ergódica y admite una ley de probabilidades estacionarias única.

Problema 2

1. La cadena de Markov asociada al problema es la siguiente:

Para poder completar el modelo de la vida del ingeniero como una cadena de markov con beneficios, falta definir los beneficios asociados al problema. Para ello, primero adoptaremos la siguiente notación:

Estado 1: Empleado

Estado 2: Gerente

Estado 3: Calle

Estado 4: Muerte

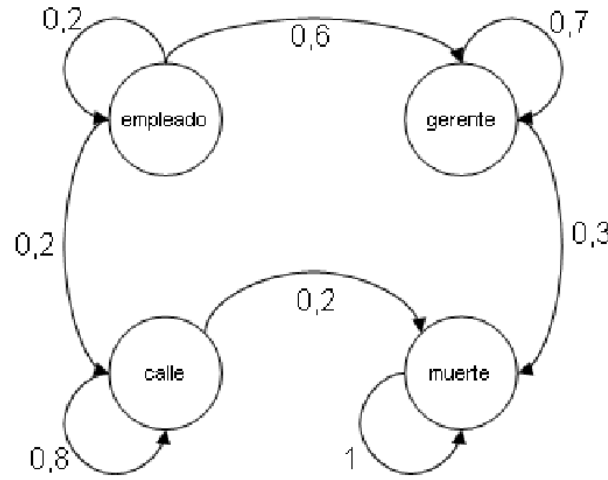


Figura 1: Cadena problema 2

Luego, podemos definir los beneficios asociados al problema como sigue:

$$r_1 = 15M\$ \quad , \quad r_2 = 40M\$ \quad , \quad r_3 = 1M\$ \quad , \quad r_4 = 0$$

Además,

$$\begin{aligned} r_{ij} &= 0 \quad \forall (i, j) \neq (1, 2) \\ r_{12} &= 0,2 \cdot 10 \end{aligned}$$

Así,

$$\hat{r}_1 = 17M\$ \quad , \quad \hat{r}_2 = 40M\$ \quad , \quad \hat{r}_3 = 1M\$ \quad , \quad \hat{r}_4 = 0$$

2. Los ingresos que el ingeniero obtendrá en promedio durante toda su vida laboral, corresponde al beneficio acumulado considerando que se comenzó en el estado 1. Esto se debe a que la carrera del ingeniero siempre comienza como empleado. Además, debemos considerar toda la vida del ingeniero, hasta que muere, cosa que ocurrirá en "mucho tiempo más". Luego,

$$E(\text{ingresos}) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k(1),$$

es decir, se pide la primera componente del vector de beneficios, que corresponde al beneficio acumulado esperado si se comienza en el estado 1. De esta forma, reemplazando la expresión que conocemos para V_k , tenemos:

$$E(\text{ingresos}) = \lim_{k \rightarrow \infty} kge + W + [P]^k(V_0 - W)$$

donde:

$$ge = \Pi \hat{r}$$

$$V_0 = \hat{r} \text{ (En este caso)}$$

Además, sabemos que $[P]^k$ converge a las matriz de probabilidades estacionarias y que W corresponde al vector asintótico de beneficios relativos.

Ahora, notemos que tenemos una cadena con una clase transiente y otra recurrente. Esto significa que las probabilidades estacionarias de la clase transiente serán 0 y de la clase recurrente 1, así:

$$\Pi = (0, 0, 0, 1)$$

De esta forma, el producto punto $\Pi \hat{r}$ queda igual a 0. Luego, los ingresos quedan:

$$E(\text{ingresos}) = \lim_{k \rightarrow \infty} W + [P]^k (V_0 - W)$$

$$\begin{aligned} E(\text{ingresos}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} W + [P]^k (V_0 - W) \\ &= W + \lim_{k \rightarrow \infty} [P]^k (V_0 - W) \\ &= W + [\Pi] (V_0 - W) \end{aligned}$$

Notar que $[\Pi]$ es una matriz que en toda la i -ésima columna contiene la probabilidad estacionaria del estado i . Además, debemos elegir que $W_4 = 0$ para que podamos obtener una solución para W . Luego, si consideramos las probabilidades estacionarias de esta cadena, junto a la forma de V_0 y ahora de W , tenemos que el producto punto de $[\Pi](V_0 - W)$ también es cero. Así,

$$E(\text{ingresos}) = W$$

El problema, se traduce en calcular los W . Esto lo hacemos resolviendo:

$$W + ge = \hat{r} + PW, \text{ donde } ge = 0$$

Esto se traduce en que:

$$W = (I - P)^{-1} \hat{r}$$

por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{W} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 40 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111,7 \\ 133,3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \vec{V}_\infty &= \begin{pmatrix} 111,7 \\ 133,3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esta forma y como el ingeniero comienza su vida laboral como empleado, los ingresos promedio que éste recibe corresponden a W_1 , es decir a 111.7 millones de pesos.

3. Para calcular la cantidad esperada de años que el ingeniero trabaja como empleado, podemos definir la siguiente estructura de beneficios:

$$\hat{r}_1 = 1 \quad , \quad \hat{r}_2 = 0 \quad , \quad \hat{r}_3 = 0 \quad , \quad \hat{r}_4 = 0$$

de la misma forma que en la parte anterior, tenemos que $\vec{V}_\infty = \vec{W}$ por lo que:

$$\vec{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como debemos empezar a contar desde que entramos al estado *empleado* el valor que se busca corresponde a $W_1 = 2,5$ años.

para obtener el valor esperado de años que el ingeniero trabaja como gerente se puede utilizar la siguiente estructura de beneficios:

$$\hat{r}_1 = 0 \quad , \quad \hat{r}_2 = 1 \quad , \quad \hat{r}_3 = 0 \quad , \quad \hat{r}_4 = 0$$

por lo que:

$$\vec{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3,3 \\ 2,7 \end{pmatrix}$$

en este caso se debe empezar a contar desde que el ingeniero comienza a trabajar como gerente, por lo que el valor que se busca es $W_2 = 3,3$ años.

Como para ambos casos una vez que se sale de los estados *empleado* y *gerente* no se vuelve a entrar en ellos el tiempo de permanencia en ellos corresponde a una v.a. geométrica de probabilidad de salida (éxito) 0.4 y 0.3 respectivamente, por lo que el valor esperado de permanencia en estos estados puede calcularse como:

$$\begin{aligned} \text{Tiempo esperado como empleado} &= \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ años} \\ \text{Tiempo esperado como gerente} &= \frac{1}{0,3} = 3,3 \text{ años} \end{aligned}$$

Otra estructura de beneficios que se puede utilizar para calcular los tiempos esperados como empleado y gerente es asignarle el valor 1 a la transición que vuelve al estado anterior, es decir $r_{11} = 1$ para el caso del tiempo esperado como empleado y $r_{22} = 1$ para el caso de gerente, con todos los demás beneficios nulos, de esta forma:

Para el caso de empleado:

$$\hat{r}_1 = 0 + 0,6 \cdot 1 = 0,6 \quad , \quad \hat{r}_2 = 0 \quad , \quad \hat{r}_3 = 0 \quad , \quad \hat{r}_4 = 0$$

por lo que:

$$\vec{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el resultado corresponde a $W_1 + 1 = 2,5$, ya que al contar las transiciones sólo se están contando las veces que visita el estado luego de estar en él la primera vez.

Para el caso de gerente:

$$\hat{r}_1 = 0 \quad , \quad \hat{r}_2 = 0 + 0,7 \cdot 1 = 0,7 \quad , \quad \hat{r}_3 = 0 \quad , \quad \hat{r}_4 = 0$$

por lo que:

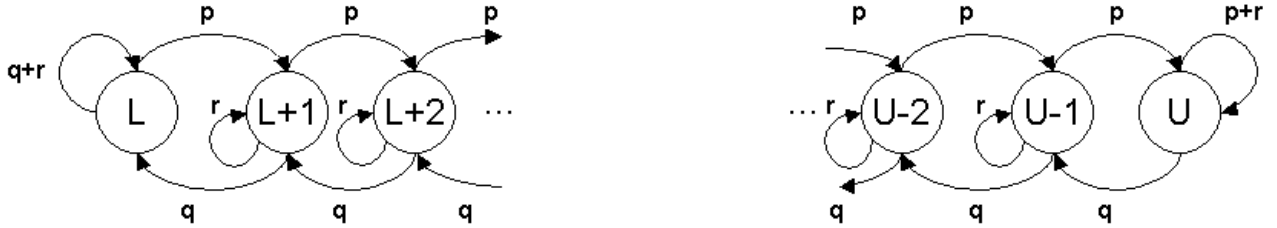
$$\vec{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1 \\ 2,3 \\ 1,9 \end{pmatrix}$$

De la misma forma que en el caso anterior el valor buscado corresponde a $W_2 + 1 = 3,3$

Como se puede observar las tres formas de responder esta pregunta son correctas.

Pregunta 3

1. La cadena se muestra en la siguiente figura.



Existirá una ley estacionaria debido a que todos sus estados están comunicados entre sí (una sola clase), la cadena es finita (la clase es recurrente) y existen estados que pueden ciclar sobre si mismos (la clase es apériodica), es decir, la cadena es ergódica.

Considerando $q \neq p$ vemos que la ley de prob. estacionarias debe cumplir con lo siguiente (dado que es la única ley estable).

$$\pi_L \cdot p = \pi_{L+1} \cdot q$$

$$\pi_U \cdot q = \pi_{U-1} \cdot p$$

$$\pi_i \cdot (p + q) = \pi_{i-1} \cdot p + \pi_{i+1} \cdot q \quad \forall i \in \{L+1, \dots, U-1\}$$

Sea $\rho = \frac{p}{q}$. Con un poco de algebra vemos que:

$$\begin{aligned}
\pi_L \cdot \rho &= \pi_{L+1} \\
\pi_L \cdot \rho^2 &= \pi_{L+2} \\
&\vdots \\
\pi_L \cdot \rho^{i-L} &= \pi_i \\
&\vdots \\
\pi_L \cdot \rho^{U-L} &= \pi_U
\end{aligned}$$

Así podemos determinar el valor de π_L , puesto que estos números corresponden a una ley de probabilidades.

$$\pi_L = \left[\sum_{i=L}^U \rho^{i-L} \right]^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{U-L} \rho^i \right]^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{U-L+1}}$$

Entonces:

$$\pi_i = \rho^{i-L} \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{U-L+1}}$$

2. Debemos formular un problema de programación dinámica que nos entregue la estrategia óptima de inversión en acciones. La información relevante para la variable de estado será el precio de la acción, el dinero acumulado. La variable de decisión será vender o no en el caso de poseer el dinero como acciones y comprar o no en el caso en que no se tenga el dinero en forma de acciones, es decir, si el dinero pasará al próximo período en forma de acciones o no.

El modelo es el siguiente:

- Periodos: Cada uno de los días $(1, \dots, T)$
- Estado:

P_t = Precio de la acción en el día t .

M_t = Cantidad de dinero que se posee en el periodo t .

- Decisiones:

$$E_t = \begin{cases} 1 & \text{El dinero estará en acciones} \\ 0 & \text{El dinero no estará en acciones} \end{cases}$$

- Recurrencia:

$$\begin{aligned}
V^*(P_t, M_t) &= \max\{V(P_t, M_t, E_t = 1), V(P_t, M_t, E_t = 0)\} \\
&= \max\{E_{P_{t+1}}[V^*(P_{t+1}, \frac{P_{t+1}}{P_t} \cdot M_t)], E_{P_{t+1}}[V^*(P_{t+1}, M_t)]\}
\end{aligned}$$

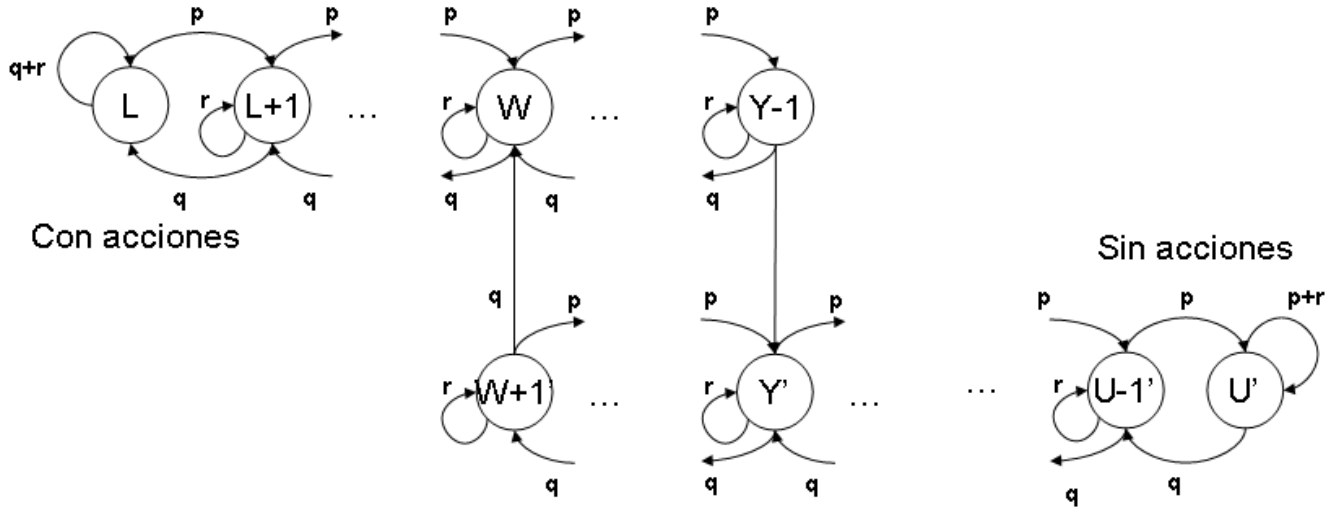
- Condiciones de borde.

$$V_{T+1}^*(P_{T+1}, M_{T+1}) = M_{T+1}$$

$$M_1 = M$$

$$P_1 = i$$

- (0.0 pts) La idea es comprar barato y vender caro. Entonces w debería ser menor que y .
- (1.5 pts) La cadena modificada se muestra a continuación.



- (0.5 pts) La rentabilidad de largo plazo se puede calcular a partir de las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte anterior. Claramente en la cadena donde no tengo acciones la rentabilidad es 0. En estados donde sí tengo acciones, si el precio de la acción es i , entonces la rentabilidad esperada en ese estado es $r_i = \frac{(i-1) \cdot q + i \cdot r + (i+1) \cdot p}{i}$. El estado L representa una excepción, su rentabilidad es $r_L = \frac{L \cdot (r+q) + (L+1) \cdot p}{L}$. Así, la rentabilidad esperada de largo plazo es:

$$R = \sum_{i=L}^{W-1} r_i \cdot \pi_i$$

- (0.5 pts) Dado que las ganancias están siempre aumentando, en el largo plazo la ganancia acumulada debiese divergir para toda política de inversiones razonable ($w < y$). Por esto lo lógico es comparar rentabilidades diarias de largo plazo más que ganancias acumuladas (ojo que comparar ganancias diarias de largo plazo tampoco tiene sentido puesto que la ganancia diaria debería ser proporcional al beneficio acumulado y por lo tanto también diverge).

Como encontrarlo... en la parte anterior se calculo la rentabilidad diaria para una política en particular. Los alumnos debieran basarse en ese resultado para idear un método. Ej: Si se pueden determinar las prob. estacionarias en función de w e y entonces se puede expresar la rentabilidad diaria de largo plazo como función de w e y y por lo tanto tan solo se debe maximizar esa función dentro de los valores coherentes para w e y .