

Control 2

Problema 1

Christiano Pernotti, el futuro mejor jugador de todos los tiempos, ha sido contratado para la temporada 2005, por la Universidad de Chile. Dado que lo anterior provocará que la venta de entradas para esta temporada se eleve hasta niveles nunca antes vistos en el fútbol chileno, es que el Dr. Chanté Chantosco ha decidido modelar la venta de entradas durante la temporada 2005. El Dr. sabe que el estadio donde se jugarán los K partidos de la temporada (K muy grande), tiene una capacidad de N asientos (*con N par*). Sabe además que el número de personas que asistirá al estadio en el i -ésimo partido, solo dependerá de las personas que han asistido al partido anterior (partido $i - 1$). Así, el número de adultos que llega a presenciar un partido se distribuye poisson de tasa λ_l , donde l es el número de adultos que llegó al estadio en el partido anterior. Además, existe una probabilidad P_m (donde m es el número de niños en el partido anterior) de que cada adulto por separado llegue al estadio acompañado de un niño (que ocupa el mismo espacio que un adulto). Considere que las llegadas al estadio son simultaneas y que por política del plantel, tendrán preferencia de entrada los adultos acompañados de niños (Cada adulto puede llegar con máximo un niño). El Dr. Chantosco le ha pedido a usted que haga el estudio pertinente y que para eso siga los siguientes pasos:

1. (3.0 Ptos) ¿Por qué esta situación puede ser modelada como una Cadena de Markov en tiempo discreto?. Modélela, especificando estados, clases y probabilidades de transición, clasifique sus estados y clases. Cuántas leyes estables existen para esta cadena?
2. (0.5 Ptos) ¿Cuál es el número esperado de asistentes a uno de los últimos encuentros?
3. (0.5 Ptos) ¿Cuál es la utilidad esperada por concepto de venta de entradas en el último partido de la temporada, sabiendo que a este encuentro entran exactamente W niños?. Para esto considere que cada adulto paga un precio P_A y que cada niño paga P_N .

Otro problema que aqueja a nuestro fútbol es la violencia en los estadios. Se sabe que la violencia (V) puede ir desde un grado 1 hasta F y que en un partido cualquiera i , ésta depende del resultado que obtuvo un equipo en el partido anterior. En este sentido, la probabilidad de que en un partido la violencia llegue a nivel v será $q_v(z)$ (con $z \in \{\text{ganar}(G), \text{perder}(P), \text{empatar}(E)\}$). Asimismo, se sabe que el desempeño del equipo en un partido cualquiera depende del nivel de violencia en el partido anterior, es decir, si el partido pasado hubo un nivel de violencia v , la probabilidad que este partido se gane es $r_g(v)$, de que se empate es $r_e(v)$ y de que se pierda es $r_p(v)$.

1. (1.0 Ptos) Modele la situación anterior como una cadena de Markov, especificando probabilidades de transición, clases y tipos de clases. ¿Existen probabilidades estacionarias?
2. (1.0 Ptos) Suponiendo que la asistencia al estadio depende de la violencia en los estadios y del desempeño que ha tenido el equipo en el partido anterior, ¿existe la posibilidad de modelar esta situación mediante una cadena de Markov?. ¿Cómo lo haría?. Hable de los estados, probabilidades de transición, clases y posibles leyes estables.

Problema 2

En este problema estudiaremos la vida profesional de un ingeniero que decide buscar trabajo en relación de dependencia, es decir, no considera como posibilidad ejercer la profesión de forma “independiente”. Consideremos que este ingeniero puede tener dos tipos de trabajo: **empleado** y **gerente**. Otra posibilidad que existe es la de **quedar en la calle**. Además, tarde o temprano, este ingeniero morirá.

Se tiene la información de que un **empleado** mantiene su condición de un año para el siguiente con probabilidad 0,6. Por otra parte, un **empleado** es ascendido a **gerente** para el próximo año, con probabilidad 0,2. Además, un empleado corre el riesgo de ser despedido y **quedar en la calle** con probabilidad

0,2. Mientras el ingeniero es **empleado** lleva una vida tranquila y por lo tanto podemos asumir que su probabilidad de morir es nula.

Un **gerente** mantiene su condición para el año entrante en el 70 % de los casos y nunca es despedido. Por otro lado, dada la agitada vida que lleva muere de un año para el siguiente con probabilidad 0,3.

Si en algún momento, el ingeniero **queda en la calle**, lamentablemente mantendrá esta condición hasta que deje este mundo, lo que sucede con probabilidad 0,2.

Los ingresos anuales que un **empleado** recibe por año ascienden a 15 millones de pesos, mientras que un **gerente** recibe en el mismo lapso de tiempo un monto de 40 millones. Por otro lado, si el ingeniero **está en la calle** recibe, por trabajos menores, un monto de 1 millón de pesos al año. Además, cuando un **empleado** es ascendido a **gerente** recibe un premio por el valor de 10 millones de pesos.

1. (2.0 ptos) Modele la vida laboral del ingeniero como una cadena de Markov con beneficios.
2. (2.0 ptos) ¿A cuánto ascienden, en promedio, los ingresos que el ingeniero recibirá durante toda su vida laboral?
3. (2.0 ptos) ¿Cuántos años se espera, en promedio, que el ingeniero trabaje como **empleado**? ¿y como **gerente**?

Pregunta 3

1. (1.0 ptos) Una matriz de transiciones se dice doblemente estocástica si

$$\sum_i P_{ij} = 1 \quad \forall j.$$

Esto es, todas las columnas suman 1. Muestre que una cadena ergódica de n estados, con matriz de transición doblemente estocástica, tiene la siguiente ley estacionaria:

$$\pi_i = \frac{1}{N} \quad \forall i$$

2. Un ingeniero que trabaja en la mesa de dinero de la Bolsa de Santiago se enfrenta a la siguiente situación. Estudiando el comportamiento del precio de las acciones de la empresa X ha descubierto que diariamente esta acción puede aumentar su valor en una unidad, lo que ocurre con probabilidad p , disminuir en una unidad, con probabilidad q , o mantenerse, con probabilidad r ($r + p + q = 1$). Además cuando el precio de la acción llega al nivel de $\$L$ la probabilidad de bajar es 0 y la probabilidad de mantenerse es $r + q$. De la misma forma, cuando el precio de la acción llega al nivel de $\$U$ la probabilidad de subir es 0 y la probabilidad de mantenerse es $r + p$.

Gracias a esta información privilegiada el ingeniero planea construir una estrategia de inversiones que le permita ganar dinero rápidamente. Suponga que el ingeniero es libre de comprar o vender acciones a cualquier precio y que inicialmente el precio de la acción es $\$i$.

- a) (1.5 ptos) Modele el precio diario de la acción de la empresa x como una cadena de Markov en tiempo discreto. Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionaria. Encuentre una expresión para dichas probabilidades (considere $q \neq p$).
- b) (2.0 ptos) Suponiendo una fortuna inicial de $\$M$, formule el problema de decisión que enfrenta el ingeniero si desea maximizar sus utilidades cuando quedan T días para su jubilación (día a partir del cual no podrá seguir tranzando en la bolsa).
- c) (1.5 ptos) Dado que el ingeniero es aun muy joven, suponga que el número de días que quedan para su jubilación es infinito. Además suponga que $p = q = \frac{1}{4}$. Suponiendo que la estrategia del ingeniero es comprar cuando el precio es w y vender cuando el precio es y . ¿Que valor es mayor? ¿Que valores cree coherentes para w e y . ¿Cual es la rentabilidad diaria esperada de largo plazo?.