



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Denis Sauré, Rafael Epstein.
Aux : C. Berner, A. Neely, D. Yung

Solución Clase Auxiliar 29 de Septiembre, 2004
Cadenas de Markov en tiempo discreto

Pregunta 1

- Entonces, lo que modelamos es la gente que hay en la estación justo antes de subirse a un bus, por lo tanto en un periodo siempre: se sube la gente y luego llegan los que tratarán de irse en el próximo bus. Esta cadena admite probabilidades estacionarias porque es finita (a lo más hay N personas esperando) y tiene una única clase recurrente aperiódica (es fácil ver que todos los estados se comunican entre si). Dado que todos los estados están conectados entre si, no tiene sentido dibujar la cadena. Sólo debemos entregar una expresión para las probabilidades de transición. Para esto condicionamos sobre la cantidad de pasajeros que se suben en el próximo bus.

$$P_{ij} = \sum_{k=k^*}^i P_{ij} | (\text{Suben } k \text{ personas}) P[\text{Suben } k \text{ personas}]$$

Donde $k^* = \max\{0, (i - j)\}$

Si el estado actual es i personas en el paradero y el bus es del tipo rápido, el número de personas que abordará el bus será el $\min(K, i)$ con probabilidad 1. Si el bus es del tipo lento la probabilidad que se suban k personas será:

Caso $i \leq K$:

$$P[\text{Suben } k \text{ personas} = k] = \binom{i}{k} d^k (1-d)^{i-k} \quad k \leq i$$

Caso $i > K$:

$$P[\text{Suben } k \text{ personas} = k] = \begin{cases} \binom{i}{k} d^k (1-d)^{i-k} & k < K \\ \sum_{n=K}^i \binom{i}{n} d^n (1-d)^{i-n} & k = K \end{cases}$$

Donde los casos omitidos tienen probabilidad de ocurrencia nula.

De esta manera, sin saber de qué tipo es el bus que va a salir del terminal se tiene que:

Caso 1: $i \leq K, k < i$

$$P[N_B = k] = \binom{i}{k} d^k (1-d)^{i-k} \cdot p_l$$

Caso 2: $i \leq K, k = i$

$$P[\text{Suben } k \text{ personas} = k] = d^k \cdot p_l + p_r$$

Caso 3: $i > K, k < K$

$$P[\text{Suben } k \text{ personas} = k] = \binom{i}{k} d^k (1-d)^{i-k} \cdot p_l$$

Caso 4: $i > K, k = K$

$$P[\text{Suben } k \text{ personas} = k] = \sum_{n=K}^i \binom{i}{n} d^n (1-d)^{i-n} \cdot p_l + p_r$$

Entonces, para terminar nuestro calculo tan solo necesitamos calcular una expresi3n genérica para

$$P_{ij} | (\text{Suben } k \text{ personas})$$

Sin embargo, si k de las i personas se suben al bus entonces quedan tan solo $i - k$ personas en el terminal, entonces para completar las j personas necesitamos que lleguen $j - i + k$ (o más en el caso $N = j$) personas al terminal Entonces:

$$P_{ij} | (\text{Suben } k \text{ personas}) = \begin{cases} \frac{(\lambda \cdot 15)^{j-i+k} e^{-\lambda \cdot 15}}{(j-i+k)!} & \text{si } j < N \\ \sum_{n=j-i+k}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot 15)^n e^{-\lambda \cdot 15}}{n!} & \text{si } j = N \end{cases}$$

Solo resta reemplazar.

2. Sabemos que si cuando llega hay menos de K pasajeros siempre podrá tomar el siguiente bus rápido que pase, si todavía está esperando en el paradero y podrá irse en el siguiente bus lento con probabilidad d (la probabilidad que quiera tomarlo). Si llamamos T_v al tiempo que transcurre desde que pasa el primer bus hasta que llega a su destino podemos escribir:

$$E[T_v] = T_r \cdot p_r + T_l \cdot p_l \cdot d + p_l \cdot (1-d) \cdot (15 + E[T_v])$$

Esto, porque si el primer bus que pasa es lento y no lo toma, estará en la misma situaci3n en 15 minutos más. Así:

$$E[T_v] = \frac{T_r \cdot p_r + T_l \cdot p_l \cdot d + (1-d) \cdot p_l \cdot 15}{1 - p_l \cdot (1-d)}$$

Por otra parte, el tiempo que en promedio falta desde que llega al paradero hasta que pasa el primer bus es 7,5 minutos puesto que condicional a que ocurre en los 15 minutos entre buses, la esperanza del tiempo en que ocurri3 el evento está uniformemente distribuida.

Finalmente la esperanza del tiempo que transcurre desde que el pasajero llega al terminal hasta que llega a su destino será $7,5 + E[T_v]$

3. El Trade-Off que enfrenta es tomar el bus lento y demorar más en el viaje o esperar en el terminal a que eventualmente pase el bus rápido (y me pueda subir) y tardar menos en el viaje.
4. La política óptima debe estar condicionada al número de pasajeros que están en la fila antes del pasajero en cuesti3n. Así, dado que estoy en la posici3n k -ésima debo decidir si se está dispuesto a viajar en un bus lento o es mejor esperar hasta que venga el próximo bus rápido.

Hay que notar que la estrategia óptima de quién esté en la posici3n k será también óptima para todos quienes estén tras él y que la estrategia para quienes estén muy atrás en la fila será intentar subir a cualquier bus. Por otra parte, claramente serán estrategias subóptimas donde una vez que se decide esperar por un bus rápido (pudiendo subir a uno lento) en una decisi3n posterior se elija tomar un bus lento. Por último, dado que la capacidad del bus es K las decisiones serán iguales por tramos de K pasajeros en la fila.

Como sólo se debe decidir cuando existe la posibilidad de tomar un bus lento se esperará (por un bus rápido) si

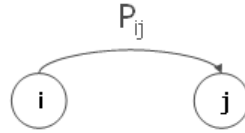
$$T_l > \left\lceil \frac{k}{K} \right\rceil^+ \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} p_r p_l^{i-1} \cdot 15 \cdot i \right\} + T_r$$

Problema 2

- Definitivamente es posible modelar el número de maquinas buenas al comienzo de un día. Esto dado que el estado posee información que resume todo lo que necesitamos saber: Si existen i maquinas buenas al comienzo del día, entonces (dado que las maquinas solo pueden estar buenas o malas) obligatoriamente tengo $T - i$ máquinas malas las cuales estarán disponibles al comienzo del próximo día, si no fuese así no estarían malas (dado que solo pueden fallar durante el transcurso de un día). Por otro lado tenemos que:

$$S(j, i) = \begin{cases} \binom{i}{j} q^j (1-q)^{i-j} & i \geq j \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Claramente tendremos $T + 1$ estados (desde el 0 al T), sin embargo dibujar las transiciones y un esquema de la cadena general es muy complicado (debido al elevado número de transiciones). Entonces la mejor forma de determinar la cadena es especificar cada transición entre estados con la probabilidad de transición asociada. Entonces la cadena queda como se muestra en la figura a continuación. Para



determinar P_{ij} debemos notar el hecho que si $T-i$ máquinas estarán con seguridad buenas en el siguiente etapa, entonces sólo tiene sentido que $j \geq T - i$. Por otro lado, para los j que cumplen la condición tenemos que la transición implica que sólo una cantidad $j - T + i$ de las i máquinas buenas sobrevive (o que $T - j$ no lo hacen). De esta forma tendremos que:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & j < T - i \\ \binom{i}{T-j} q^{T-j} \cdot (1-q)^{j-T+i} & \sim \end{cases}$$

En términos de $S(j, i)$ esto es:

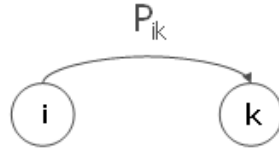
$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & j < T - i \\ S(T - j, i) & \sim \end{cases}$$

Finalmente es bastante claro que (dado que todos los estados están comunicados entre si, la cadena es finita y hay estados aperiódicos) la cadena es ergódica, por lo si existirán probabilidades estacionarias. No esta demás decir que todos los estados forman una única clase recurrente.

- Aquí tenemos que tener cuidado puesto que las revisiones se realizan al final del día. Entonces el beneficio lo obtengo cuando estoy en el estado T y no se hecha a perder ninguna máquina (y si revisan ese día). La multa la obtengo seguro si empiezo con menos de L máquinas, pero si tengo más, esto depende de si se hechan a perder las suficientes como para llegar al final con menos de L máquinas. Esto que así:

$$E(\text{Beneficios}) = r \cdot \left[-\left(C \cdot \sum_{k=0}^{L-1} \pi_k \right) - C \cdot \sum_{k=L}^T \pi_k \cdot \sum_{j=k-L+1}^k \binom{k}{j} (1-q)^{k-j} \cdot q^j + \pi_T \cdot (1-q)^T \cdot F \right]$$

4. La cadena sigue siendo la misma, sólo cambiarán las probabilidades de transición. Ahora debemos considerar que al próximo día no contaremos con $T - i$ máquinas buenas con seguridad si no con una cantidad menor o igual. ¿Cuántas?: Si tengo $T - i$ máquinas con desperfectos puedo formar $\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor$ lotes de J , por lo tanto tendré $\lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J$ máquinas buenas con seguridad. Tomando esto en cuenta tendremos que:



Donde:

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J \\ (i + \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J - k) q^{i + \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J - k} \cdot (1-q)^{k - \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J} & k \geq \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor \cdot J \end{cases}$$

En función de $S(j, i)$ queda de la siguiente forma ($n = \lfloor \frac{T-i}{J} \rfloor$):

$$P_{ik} = \begin{cases} 0 & k < n \cdot j \\ S(i + n \cdot j - k, i) & k \geq n \cdot j \end{cases}$$

5. Utilizando el mismo razonamiento de la parte c) tendremos que::

$$\begin{aligned} E(\text{Beneficios}) = & r \cdot \left[(-C \cdot \sum_{k=0}^{L-1} \pi_k) - C \cdot \sum_{k=L}^T \pi_k \cdot \sum_{j=k-L+1}^k \binom{k}{j} (1-q)^{k-j} \cdot q^j \right. \\ & \left. + \pi_T \cdot (1-q)^T \cdot F - \sum_{i=0}^T \pi_i \cdot n \cdot K \right] \end{aligned}$$

Noten que el termino extra (respecto a la parte c)) se refiere al costo fijo, el cual depende del estado en el que nos encontramos, específicamente al valor de i respecto a valor de T (para ver cuantos lotes se mandan a reparar). El suponer que siempre se mandaba a reparar a lo más un lote de j máquinas es completamente valido sin embargo en la pauta debe abarcar el caso más general.

Problema 3

1. Lo único importante es distinguir $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$.

Si las parejas se forman al azar tengo $N - 1$ individuos candidatos a emparejarse con alguien en particular (casos totales), de los cuales hay i infecciosos. Si me emparejo con un infeccioso la probabilidad de contagio es p y por lo tanto: $q_i = \frac{i}{N-1} \cdot p$

2. No, con sólo tener el número de infecciosos no es posible determinar, en probabilidad, la evolución del sistema (condición de Markov). Por ejemplo, si $X_t = 10$, pero tenemos a todo el resto infectado $X_{t+1} = 0$ con seguridad, sin embargo si hay alguien sano la probabilidad que $X_{t+1} = 0$ es estrictamente menor que 1.
3. Para simplificar el dibujo del grafo consideraremos las posibles transiciones desde un nodo (i, j) donde $i = X_t$ y $j = Y_t$.

Caso 1 En este caso la probabilidad de transición entre el estado (i, j) y uno $(k, j-k)$, con $0 < i \leq j$,

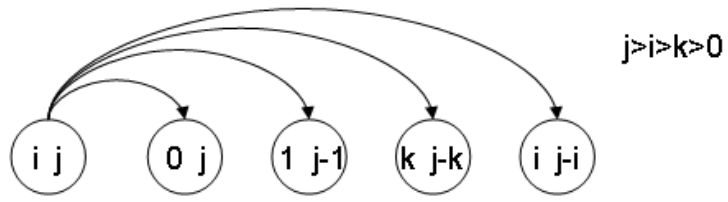


Figura 1: Caso 1

implica que k personas de las que inicialmente estaban sanas se contagian, pasando a estar infectadas al inicio del período siguiente. Ocupando q_i tenemos que:

$$P[(i, j), (k, j-k)] = \binom{j}{k} \cdot q_i^k \cdot (1 - q_i)^{j-k} \quad \forall k, 0 \leq k \leq i$$

Caso 2

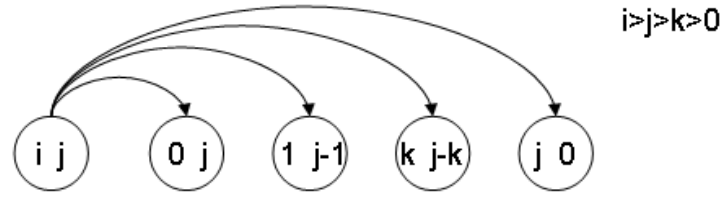


Figura 2: caso 2

Esta situación es análoga al caso anterior, pero el número máximo de personas infectadas al inicio del período siguiente ahora es j . Así, la probabilidad de transición en una etapa que empezamos en el estado (i, j) , con $i \geq j > 0$ será:

$$P[(i, j), (k, j-k)] = \binom{j}{k} \cdot q_i^k \cdot (1 - q_i)^{j-k} \quad \forall k, 0 \leq k \leq j$$

Caso 3

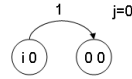


Figura 3: caso 3

En estos casos los individuos infecciosos ya no tienen a quien contagiar, por lo que con probabilidad 1 estarán en el estado $(0, 0)$ en el período siguiente.

Caso 4

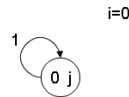


Figura 4: caso 4

En esta situación ya no quedan individuos que puedan contagiar, por lo que no se modificará el número de individuos sanos ni nadie se enfermará.

Clasificación de estados y caracterización de clases:

En este problema no hay ningún par de nodos que esté comunicado, por lo que c/u es su propia clase de equivalencia y tendremos $(N + 1)^2$ clases distintas. Las clases de los casos 1, 2 y 3 son transientes, mientras que las clases del caso 4 son todas recurrentes y aperiódicas.

4. Dado que hay múltiples clases recurrentes NO es posible tener una ley de probabilidades estacionarias en el problema original, lo que significa que la evolución del sistema en el largo plazo no será independiente de las condiciones iniciales. Por ejemplo si empezamos de cualquier estado $(0, Y_0)$ nunca lo abandonaremos porque no se puede enfermar ni mejorar nadie.

Si permitimos que la gente con alguna probabilidad se mejore, se logran comunicar muchos estados que pertenecían a clases distintas, creándose una clase transiente formada por los estados $(0, X)$, con $0 \leq X < N$ la que confluye a la clase recurrente formada por el estado $(0, N)$, es decir toda la población sana. En el caso de empezar con i individuos infectados estaremos en una clase transiente, y necesariamente luego de algún número finito de días estaremos en un estado de la clase $(0, X)$ (porque no existen transiciones a estados tipo (j, X) con $j > i$). Como en el largo plazo la probabilidad de encontrarnos en un estado transiente es 0, con probabilidad 1 estaremos en la única clase recurrente de esta cadena. Por esto, si permitimos que la gente eventualmente mejore en el largo plazo esta enfermedad se habrá erradicado completamente, y existirá una ley de probabilidades estacionarias.

Dudas, consultas y comentarios a
dyung@ing.uchile.cl