



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Denis Sauré, Rafael Epstein.
Aux : C. Berner, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 29 de Septiembre, 2004
Cadenas de Markov en tiempo discreto

Problema 1

A un terminal de autobuses llegan pasajeros de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda \frac{\text{pasajeros}}{\text{minuto}}$. Estos pasajeros esperan que salga un bus en una fila ordenada por estricto orden de llegada. Los buses salen cada 15 minutos y pueden ser de 2 tipos: Los *rápidos* y los *lentos*. La probabilidad que el siguiente bus sea rápido es p_r , mientras que con probabilidad p_l será lento. Los buses rápido demoran un tiempo fijo de T_r minutos en llegar a su destino, mientras que los buses lentos demoran T_l , con $T_l < T_r$. La capacidad de ambos tipos de buses es K y si hay más de N personas esperando en el terminal no puede entrar nadie más ($N \gg K$).

Cada vez que va a salir un bus *rápido* todos los que están esperando intentan subir a él, mientras que en el caso de un bus *lento* existirá una probabilidad d que una persona de la fila quiera irse en este bus, independiente de lo que hagan los demás y de cuanto tiempo lleven esperando.

1. (3,0 pts) Modele el número de pasajeros que hay en el terminal justo antes de la salida de un bus como una cadena de Markov en tiempo discreto, poniendo atención en los casos interesantes. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias. Escriba explícitamente las probabilidades de transición para cualquier par de estados.
2. (1,0 pts) Si cuando un pasajero llega al terminal hay menos de K personas, ¿Cuál es el tiempo esperado hasta llegar al destino?.

Suponga ahora que permitimos que los pasajeros piensen y *decidan* si quieren o no viajar en un bus lento.

3. (0,5 pts) Explique el Trade-Off que enfrenta una persona al decidir si desea o no intentar subir a un bus lento.
4. (1,5 pts) Explique como sería la estrategia óptima que deberá seguir un pasajero con el fin de minimizar el tiempo esperado que tardará en llegar a su destino.

Problema 2

Una unidad productiva de una empresa minera tiene un número muy grande que llamaremos \mathbf{T} mini retro excavadoras para la extracción del mineral. Estas máquinas se utilizan durante el día y al caer la tarde se guardan para ser utilizados en la mañana siguiente.

Sin embargo, existe una probabilidad q que una máquina en operación falle durante un día, independiente de cuántos días consecutivos lleve operando. En estos casos la mini retro excavadora será enviada al taller de reparación al final del día en el que falla, donde su mantenimiento siempre se realiza al día siguiente. De esta manera, una máquina que falla un día t estará lista para su utilización en la mañana del día $t + 2$ independiente de lo que pase con las demás.

1. Justifique porqué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el **Número de mini retro excavadoras buenas al inicio de cada día**. ¿Cuál es la probabilidad que un día fallen i máquinas si esa mañana había j buenas?. Llame a esta probabilidad $s(i, j)$.

2. Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(i, j)$, clasifique los estados en clases y caracterícelas. Argumente la existencia de una ley de probabilidades estacionarias.
3. Suponga que la cadena anterior admite probabilidades estacionarias y que usted conoce el vector Π . Además se sabe que si la mina al final de un día cualquiera cuenta con menos de L máquinas buenas y es inspeccionada por la gerencia de producción debe pagar una multa de $\$C$. Según información histórica en un día cualquiera existe una probabilidad r de que se produzca una revisión. Sin embargo, si al momento de producirse la inspección cuenta con la totalidad de estas máquinas en buen estado la unidad recibirá un incentivo económico de $\$F$. Entregue una expresión para los beneficios diarios en largo plazo por concepto de multas y estímulos por revisión del organismo de seguridad.

Considere que esta unidad de la mina modifica su política de envío de máquinas a mantención de manera que las enviará al taller sólo en lotes de J máquinas que necesitan reparación. Todas las máquinas enviadas al taller serán reparadas el día siguiente y estarán disponibles en la mañana del día subsiguiente del que fueron enviadas a mantención. La probabilidad que una máquina que está en funcionamiento una mañana cualquiera falle ese día seguirá siendo q .

4. Modele esta nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(i, j)$.
5. Suponga que la cadena anterior admite probabilidades estacionarias y que usted conoce el vector Π , y que la gerencia de operaciones realiza revisiones como las descritas en la parte (3) con las mismas probabilidades, costos y beneficios. Suponga además que cada vez que esta unidad envía un lote de máquinas al taller incurre en un costo fijo $\$K$. Entregue una expresión para los beneficios diarios en largo plazo por concepto de multas y estímulos por revisión del organismo de seguridad.

Problema 3

Suponga que al inicio de cada período, cada uno de los N individuos de una población pueden encontrarse en 3 condiciones de salud distintas: **Sano**, **Infeccioso** e **Infectado**.

En cada período se forman $N/2$ parejas al azar (suponga N par), cada una de las cuales puede mantener un contacto peligroso con probabilidad p (independiente de lo que hagan las demás). Al final del período todas las parejas se desarman pudiéndose formar otra vez.

Si una pareja que mantuvo un contacto peligroso está formada por un individuo que está **Sano** y por uno **Infeccioso**, quien estaba sano contraerá la enfermedad pasando a estar **Infeccioso** al inicio del siguiente período. Un individuo **Infeccioso** permanece en ese estado durante sólo 1 período después de lo cual pasa a ser un individuo **Infectado**.

Los individuos **Infectados** nunca abandonan esta condición, bajo la cual no pueden contagiar a nadie durante un contacto peligroso, y la que los hace inmunes a un nuevo contagio (porque ya tiene anticuerpos en su organismo).

1. Considere a un individuo particular de esta población, que actualmente se encuentra sano. Si hay i individuos infecciosos, ¿Cuál es la probabilidad de que este individuo se contagie durante el siguiente período?. Llame a esta probabilidad q_i .
2. Si consideramos X_t como el número de individuos infecciosos al inicio del período t , ¿Es posible modelar la situación descrita utilizando cadenas de Markov con X_t como variable de estado?.
3. Considere X_t , e Y_t como el número de individuos infecciosos y sanos, respectivamente, al inicio del período t . Modele la situación descrita como una cadena de Markov. Clasifique los estados, caracterice

las clases y encuentre la matriz de transición de 1 período.

Hint: No es necesario que dibuje todo el grafo, basta con identificar las transiciones de los distintos tipos de estado.

4. ¿Existirá una ley de probabilidades estacionarias?, ¿Cambia su respuesta si permitimos que un individuo pueda mejorar, es decir, pasar de infectado a sano con probabilidad r en un período?.