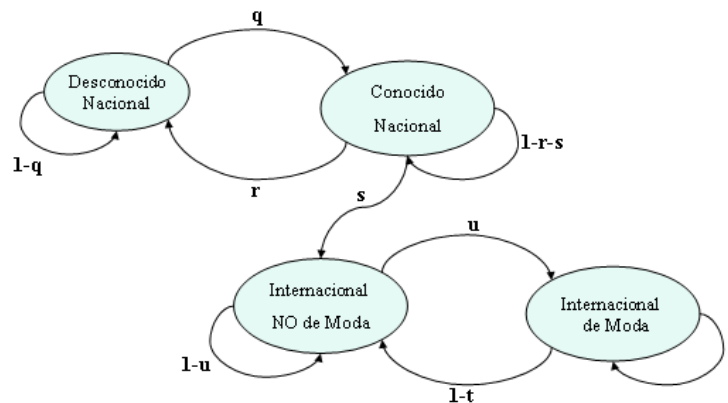




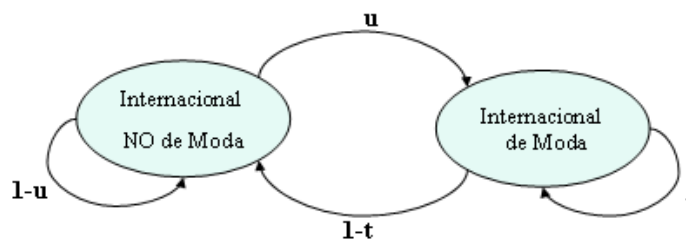
Solución Clase Auxiliar 28 de Septiembre, 2004
Cadenas de Markov en tiempo discreto

Problema 1

1. Para responder esta pregunta debemos modelar la trayectoria de la banda de Chespi como una cadena de Markov en tiempo discreto. Del enunciado se desprenden claramente tanto los estados como las probabilidades de transición:



2. Para responder esta pregunta clasificaremos los estados de la cadena. Ambos estados del tipo “Nacional” son transientes y conforman una única clase transiente, por lo tanto en algún momento en el futuro el sistema abandonará esta clase para no volver más. Es así como obligatoriamente en el largo plazo el sistema se encontrará en alguno de los otros dos estados que conforman una única clase recurrente. Es decir Chespi alcanzará la fama irremediabilmente.
3. Dado que la cadena posee una única clase recurrente aperiódica (es obvio dado que los estados de esta clase pueden “ciclar” sobre si mismos) existirá una ley de probabilidades estacionarias.
4. Los estados transientes necesariamente tendrán probabilidades estacionarias nulas. Es por esto que el sistema a resolver para calcular las probabilidades estacionarias es el asociado a la siguiente cadena:



De esta forma simplemente calculamos:

$$\begin{aligned}
P_{INM} &= (1-u) \cdot P_{INM} + t \cdot P_{IM} \\
P_{IM} &= u \cdot P_{INM} + (1-t) \cdot P_{IM} \\
1 &= P_{IM} + P_{INM}
\end{aligned}$$

Entonces:

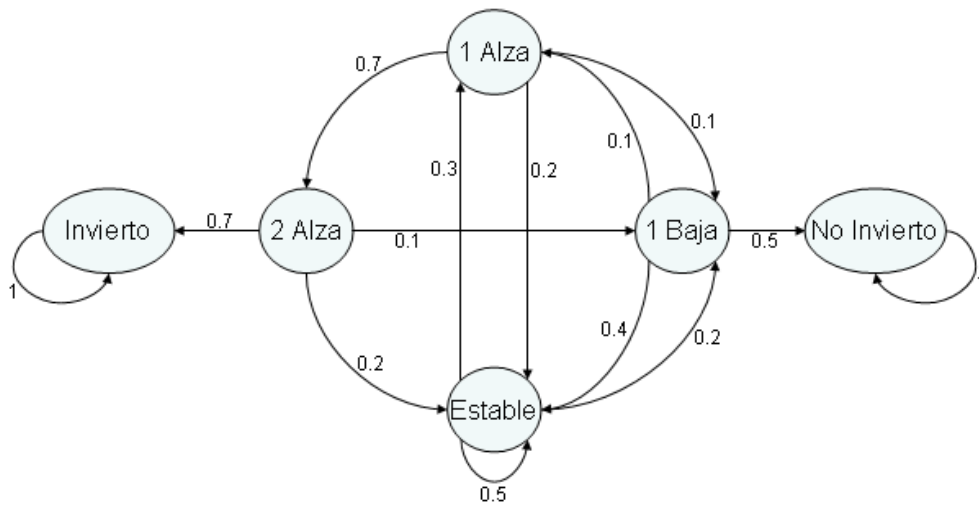
$$P_{INM} = \frac{t}{t+u}$$

5. En el largo plazo (a esto se refiere la pregunta) la probabilidad de que la banda de Chespi sea famosa y este de moda es P_{IM} . Entonces las ganancias esperadas (mensuales) en el largo plazo son:

$$E[Utilidad] = K \cdot P_{IM}$$

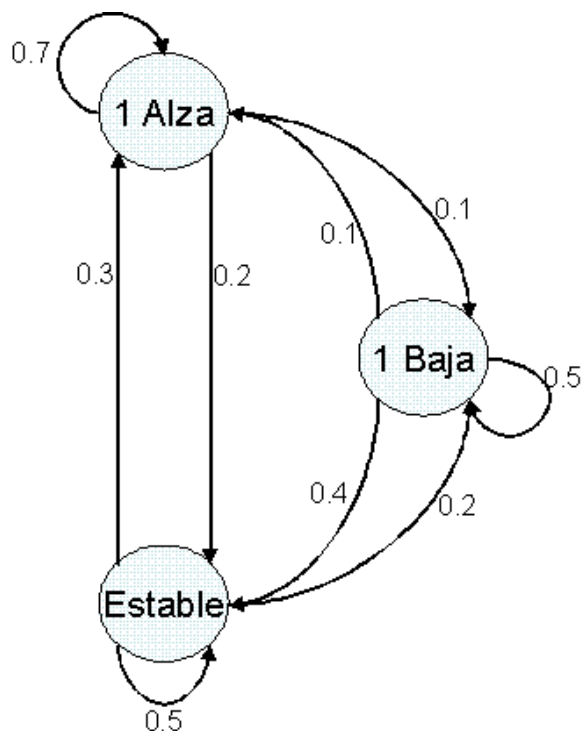
Problema 2

1. Podemos formular el problema de inversión como una cadena de markov debido a que la probabilidad de evolución entre estados del mercado (en alza, estable o en baja) depende solamente del estado actual. Con un pequeño truco seremos capaces de adaptar una cadena que indique cuando invierto. La cadena es la siguiente:



Vemos que existen 3 clases, 2 recurrentes y una transiente. Los estados invierto y no invierto conforman clases recurrentes aperiódicas por si mismos, mientras que el resto de los estados conforman una clase transiente.

2. Claramente no existirán probabilidades estacionarias dado que tenemos 2 clases recurrentes.
3. Si finalmente se invierte tendremos que el problema puede representarse con el siguiente grafo:



En esta caso existe una única clase recurrente aperiódica.

- Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias (provenientes de resolver el sistema $\Pi P = P$ y $\sum P_i = 1$) tendremos que la ganancia diaria esperada en el largo plazo será:

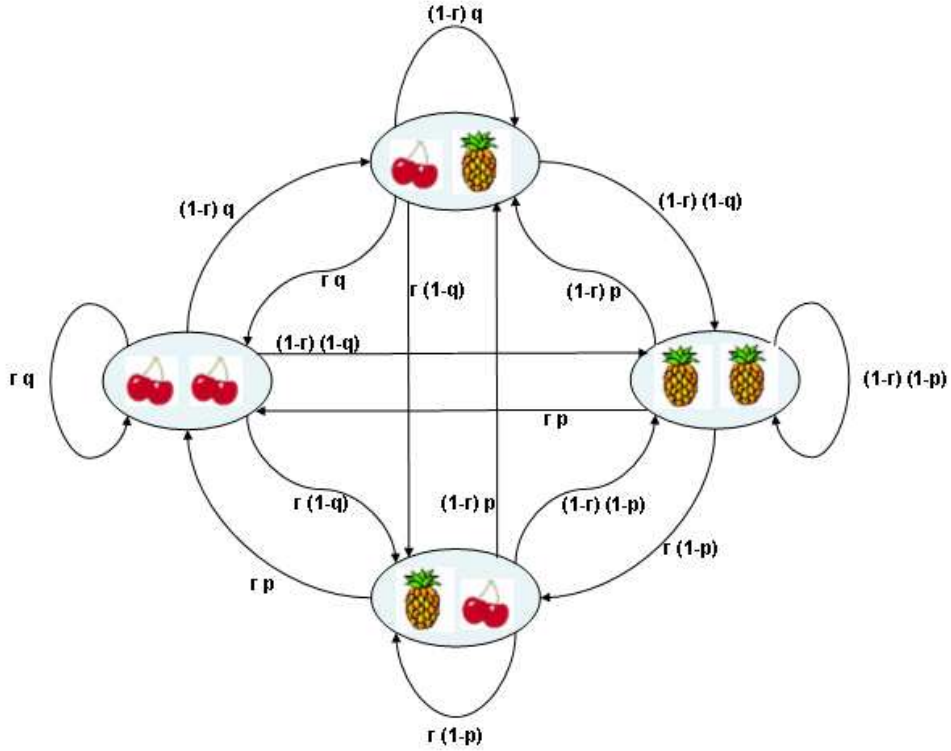
$$E[\text{Ganancias}] = ME \cdot P_E + MA \cdot P_A + MB \cdot P_B$$

Problema 3

- Los estados y las probabilidades de transición entre ellos son los que se indican en el siguiente grafo:
Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Las probabilidades de transición deben ser justificadas por separado.
- Existe una única clase recurrente, aperiódica, por lo tanto existirá una ley de probabilidades estacionarias. Para encontrar el valor de estas probabilidades simplemente calculamos una ley estable (la única):

$$\begin{aligned}
 P_{GG} &= r \cdot q \cdot P_{GG} + r \cdot q \cdot P_{GP} + r \cdot p \cdot P_{PG} + r \cdot p \cdot P_{PP} \\
 P_{GP} &= (1-r) \cdot q \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot q \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PP} \\
 P_{PG} &= r \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + r \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PP} \\
 P_{PP} &= (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PP} \\
 1 &= P_{GG} + P_{GP} + P_{PG} + P_{PP}
 \end{aligned}$$

- Dado que la máquina ha sido utilizada por mucho tiempo podemos suponer que hemos alcanzado el estado estacionario (recuerden que no miramos la situación actual del traga monedas). De esta manera la distribución de probabilidades del resultado de mi tirada será la distribución de la ley de



probabilidades estacionarias. Entonces, la probabilidad de ganar es la probabilidad de encontrar la máquina en un estado donde ambos símbolos sean iguales y además realizar la elección correcta. Esto es:

$$\begin{aligned}
 P[\text{Ganar}] &= P[\text{Escoger Guinda-Guinda}] \cdot P_{GG} + P[\text{Escoger Piña-Piña}] \cdot P_{PP} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP})
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$E[\text{Utilidades}] = \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP}) \cdot G - [1 - \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP})] \cdot (C + T)$$

4. Nuevamente, dado que la máquina lleva mucho tiempo funcionando suponemos que el resultado de la próxima tirada se rige de acuerdo a la ley de probabilidades estacionarias. Si es así, los únicos estados que nos permiten obtener una ganancia son los estados Guinda-Piña y Piña-Guinda. Entonces:

$$P[\text{ganar}] = P_{GP} + P_{PG}$$

De esta forma:

$$E[\text{Utilidades}] = P_{GP} + P_{PG} \cdot G - [1 - P_{GP} + P_{PG}] \cdot (C + T) - W$$

Dudas, consultas y comentarios a
dyung@ing.uchile.cl