



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Denis Sauré, Rafael Epstein.
Aux : C. Berner, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 28 de Septiembre, 2004
Cadenas de Markov en tiempo discreto

Problema 1

Un auxiliar de este curso ha decidido dedicarse a la música, y junto a unos amigos formó el grupo “Chespi y los Markovianos”. Actualmente se limitan a tocar los fines de semana en algunos pub capitalinos, siendo una de tantas bandas desconocidas que existen en el país.

Cada mes existe una probabilidad q que un empresario de algún sello musical nacional los escuche y decida apoyarlos para grabar y realizar giras para cantar de Arica a Punta Arenas. Si tal cosa ocurre pasarían a ser una banda conocida a nivel nacional.

Una banda que es conocida a nivel nacional corre el riesgo de perder el apoyo del sello nacional que la patrocina, con lo cual volvería a ser una banda desconocida. Cada mes, la probabilidad que esto ocurra es r . Por otro lado, una banda conocida a nivel nacional puede llegar a llamar la atención del representante de un sello musical internacional, el cual podría decidir patrocinarlos. De ser así la banda pasaría a ser conocida a nivel internacional. Cada mes existe una probabilidad s que esto ocurra ($s + r < 1$).

Una banda que es conocida internacionalmente nunca dejará de serlo. Sin embargo podemos distinguir dos categorías entre ellas: las que están de moda y las que no. Una banda internacionalmente conocida que está de moda en un mes dado seguirá estando de moda al mes siguiente con probabilidad t . Una banda conocida a nivel internacional que no está de moda en un mes dado pasará a estar de moda al mes siguiente con probabilidad u . El primer mes que una banda se hace conocida a nivel internacional nunca está de moda. Una banda sólo percibe utilidades (equivalentes a $K[\$]$) en los meses que es conocida internacionalmente y está de moda (parte de esas utilidades corresponden a una satisfacción de su ego).

Nota: Suponga $0 < x < 1 \quad \forall x \in \{q, r, s, t, u\}$.

1. Construya una cadena de Markov que represente la trayectoria de la banda de Chespi y que permita predecir si en un mes dado percibirán utilidades o no (defina estados adecuados, dibuje el grafo indicando las probabilidades de transición o bien escriba la matriz de prob. de transición).
2. ¿Llegarán “Chespi y los Markovianos” a tener éxito algún día?
3. ¿Admite la cadena una ley de probabilidades estacionarias? Justifique.
4. ¿Qué estados tienen necesariamente una probabilidad estacionaria igual a 0? Calcule las probabilidades estacionarias.
5. ¿Cuál es (aprox.) el valor esperado de las utilidades percibidas por “Chespi y los Markovianos” en Febrero del año 2048?

Problema 2

Un inversionista extranjero desea invertir su capital en el mercado accionario nacional. De acuerdo a un estudio que realizó, el comportamiento mensual de este mercado puede clasificarse en 3 categorías: En alza (A), estable (E) y en baja (B). Además, este comportamiento mensual es una variable aleatoria que depende únicamente del comportamiento en el mes anterior. La siguiente matriz representa las probabilidades de transición en el mercado accionario:

	A	E	B
A	0.7	0.2	0.1
E	0.3	0.5	0.2
B	0.1	0.4	0.5

Como el inversionista tiene la posibilidad de ubicar su capital en otro país, por lo que ha decidido observar el mercado nacional. La política de inversión que seguirá es tal que si durante 3 meses consecutivos observa al mercado nacional en alza, invierte sin retirar su dinero, sin embargo, si durante 2 meses consecutivos observa que el mercado está en baja invierte en el extranjero sin la posibilidad de reconsiderar su decisión. Si invierte en el mercado accionario nacional obtendrá un ingreso esperado mensual de \$MA, \$ME o \$MB, si el comportamiento es en alza, estable o baja respectivamente.

Si inicialmente el mercado accionario nacional se encuentra estable, responda:

1. Explique porqué este problema de inversión puede formularse como una cadena de Markov. Representélo con un grafo, identifique y clasifique sus estados.
2. ¿Existen probabilidades estacionarias?, justifique.
3. Suponga que el inversionista finalmente invierte en el mercado nacional, ¿Cómo cambia su respuesta de la parte anterior?, ¿Cuál es el ingreso promedio mensual que espera obtener el inversionista en esta situación?.

Problema 3

En un famoso casino, existe un traga monedas con sólo dos ventanas, en cada una de las cuáles puede aparecer una piña o un guinda. Dado los años de uso es sabido que la máquina está descalibrada y opera de la siguiente manera: cada vez que un jugador inserta una ficha y tira de la palanca, las dos ventanas funcionan en forma independiente. La probabilidad que en la segunda ventana a aparezca una guinda es siempre r , en cambio en la primera ventana la probabilidad que aparezca una guinda es q , si antes había aparecido una guinda, y p si antes había aparecido una piña.

El sistema de apuesta es el siguiente: Antes de ingresar la moneda de C [u.m.] usted debe predecir el resultado **exacto**¹ de la jugada. Si acierta recupera la inversión y gana G [u.m.] adicionales. De lo contrario pierde la inversión y debe pagar T [u.m.] adicionales.

1. (2,5 pts) Modele los resultados de la máquina traga monedas como una cadena de Markov en tiempo discreto. Indique claramente los estados, clases y probabilidades de transición, justificando cada una de ellas.
2. (1,5 pts) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que le permitiría encontrarlas (no es necesario calcularlas).
3. (1,0 pts) Suponga que usted llega al casino y encuentra el traga monedas desocupado (luego de haber sido utilizado durante “mucho” tiempo). Sin ver el estado actual de la maquina, usted escoge equiprobablemente cualquiera de los posibles resultados en que las 2 ventanas son iguales y tira de la palanca. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta jugada?. (Suponga conocidas las probabilidades estacionarias).
4. (1,0 pts) Ahora suponga que pagando W [u.m.] adicionales (inversión que no se recupera) usted puede retrasar su apuesta hasta una vez conocido el resultado de la primera ventana. Así, su decisión consiste en predecir si el resultado de la segunda ventana es igual o diferente al de la primera. Considere que su estrategia es decir siempre la figura contraria a la de la primera ventanilla y el traga monedas lleva funcionando “mucho” tiempo. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta nueva estrategia de juego bajo este nuevo sistema?.

¹Esto es predecir correctamente la figura de la primera ventana y la figura de la segunda ventana