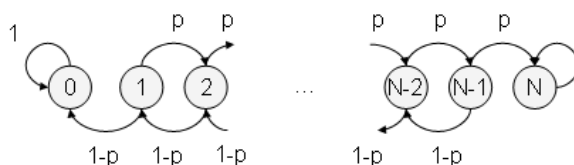




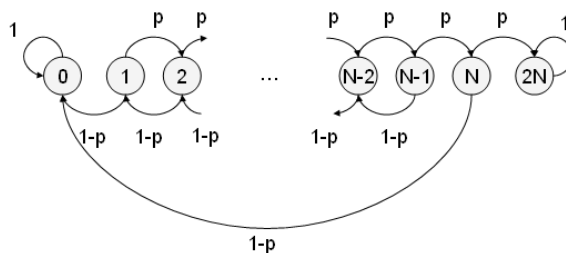
Clase Auxiliar 22 de Septiembre, 2004
Cadenas de Markov en tiempo discreto

Problema 1

1. La cadena es la siguiente:



2. La cadena es la siguiente:



3. Sea:

$$f_i = P[\text{Ganar dado que parto con } i \text{ unidades}]$$

Inmediatamente vemos que $f_0 = 0$ y que $f_N = 1$. De la misma forma vemos (condicionando en el resultado de la primera apuesta) que:

$$f_i = \frac{1}{2}f_{i+1} + \frac{1}{2}f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = f_1$$

Ahora si sumamos las $N - 1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (N - 1) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$$

De la misma forma si sumamos las $i - 1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = i \cdot f_1 = \frac{i}{N}$$

4. Para el caso general procederemos exactamente como lo hicimos para el caso particular:

$$f_i = p \cdot f_{i+1} + (1 - p) \cdot f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = \rho(f_i - f_{i-1}) \quad \forall 0 < i < N$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$ La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = \rho f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = \rho^{i-1} f_1$$

Ahora si sumamos las $N - 1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

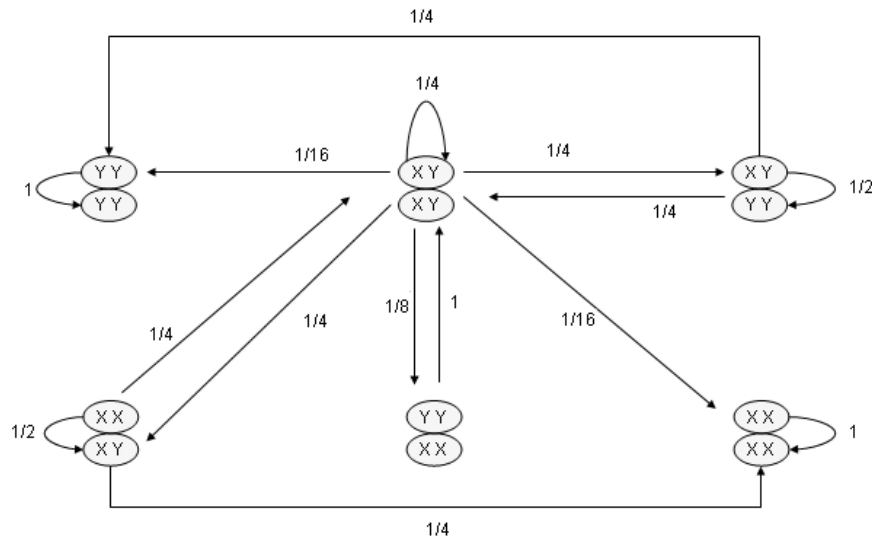
$$f_N - f_1 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \rho^i \right) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i - 1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = \left(\sum_{k=0}^{i-1} \rho^k \right) \cdot f_1 = \frac{1 - \rho^i}{1 - \rho^N}$$

Problema 2

1. Definiremos los estados como la carga genética de cada individuo de la población: De esta forma la cadena queda:

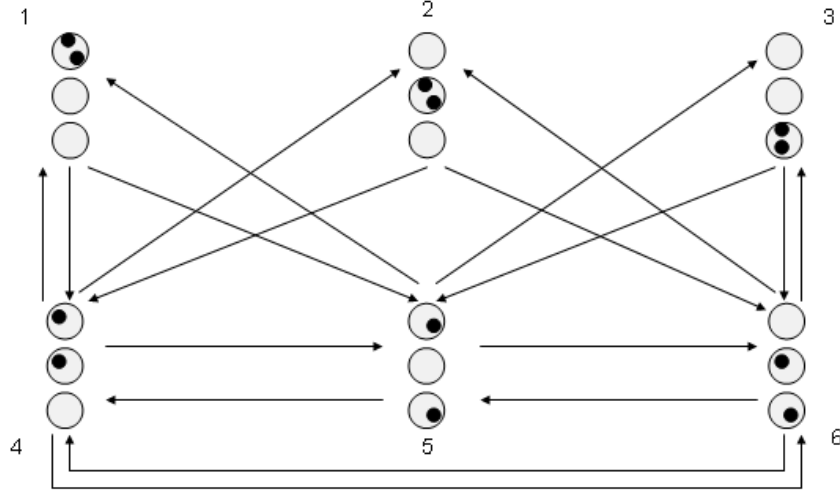


2. Claramente existen 3 clases. Dos recurrentes (aperiódicas) : la asociada al estado xx-xx y la asociada al estado yy-yy. Por otro lado existe una clase de estados transientes, compuesta por todos los otros estados.

3. Por simetría la probabilidad es $\frac{1}{2}$. Un desarrollo más riguroso puede ser logrado mediante un análisis de primer paso (es decir condicionar sobre el resultado de la primera transición y aplicando condiciones de borde, como por ejemplo que la prob. dado que estoy en el estado con solo genes recesivos es 1 y si estoy en el estado con genes no recesivos es 0, dado que ambos son recurrentes de clases distintas). Propuesto.

Problema 3

1. Tras un minuto de meditación modelamos los estados como el número de bolitas bajo cada vaso. Tendremos entonces que la cadena se define de la siguiente forma:



La matriz de transiciones es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix}$$

2. De acuerdo a la definición $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ y $r_4 = r_5 = r_6 = 1$ Entonces: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{9}$ y $\pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = \frac{2}{9}$.

Por otro lado para que $\vec{\pi}$ sea ley estable debe cumplir con:

$$\begin{aligned} \vec{\pi} &= \vec{\pi} \cdot P \\ \sum_{i=1}^6 \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

Las dos últimas condiciones se cumplen. Solo basta comprobar que (propuesto)¹ :

¹Dimensionalmente es incorrecto, pero solo porque no como hacer el símbolo de un vector transpuesto

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

3. La cadena es ergódica (una sola clase recurrente, aperiódica) por lo que posee solo una ley estable, la cual es la ley de probabilidades estacionarias. Como ya encontramos una ley estable, esta misma es la ley estacionaria. La intuición del resultado va por el lado de la conectividad entre estados (los con bolitas separadas son accesibles desde muchos más estados y a estados del mismo tipo, en cambio para los estados con bolitas juntas no existen transiciones entre el mismo tipo.)
4. Para ganar debemos parar el juego en un estado tal que sea factible el ganar, y adicionalmente escoger correctamente el vaso ganador. Entonces la probabilidad de ganar será:

$$P[\text{Ganar}] = P[\text{Parar en estado factible}] \cdot P[\text{Escoger ganador}]$$

$$P[\text{Ganar}] = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Dudas, consultas y comentarios a
crberner@ing.uchile.cl