



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: Pablo Rey, Denis Sauré, Rafael Epstein.  
Aux : C. Berner, A. Neely, D. Yung

Clase Auxiliar 22 de Septiembre, 2004  
Cadenas de Markov en tiempo discreto

## Problema 1

Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad  $p$  de ganar una unidad y una probabilidad  $1 - p$  de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad de  $i$ ,  $0 < i < N$  y juega hasta que pierde todo o llega a  $N$ .

1. Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.
2. El jugador al llegar a  $N$  cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad  $p$  su riqueza es  $2N$  (y se retira), mientras con probabilidad  $1 - p$  pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.
3. Si en la situación de la parte (a), la probabilidad de ganar es  $p = \frac{1}{2}$ , ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.
4. Resuelva el problema para el caso general, es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad de  $i$ ,  $1 < i < N$ . Se juega hasta que pierde todo o llega a  $N$ , con  $p \neq (1 - p)$ .

## Problema 2

Considere una población con sólo dos individuos que en cada generación producen dos nuevos individuos y después mueren (el tamaño de la población es, por tanto, constante igual a dos). Cada individuo porta dos genes que determinan el color de los ojos. Estos genes pueden ser los dos recesivos, los dos dominantes o tener un gen recesivo y uno dominante. Llamaremos  $X$ =Gen Dominante e  $Y$ = Gen Recesivo.

Cada uno de los padres transmite a sus descendientes un sólo gen. Además, es igualmente probable que se transmita cualquiera de los dos genes que porta el progenitor a sus descendientes.

1. Defina una cadena de Markov donde el estado del sistema sea la cadena genética de los dos individuos de la población. Dibuje el grafo asociado y calcule las probabilidades de transición.
2. Defina las clases, los tipos de estados en cada clase y su correspondiente período.
3. Cuál es la probabilidad que, en el largo plazo, sólo hayan individuos con genes recesivos si originalmente se parte con dos individuos idénticos con carga genética  $(X, Y)$ ?

## Problema 3

Un conocido mago del Paseo Ahumada ha hecho una respetable fortuna con el siguiente juego de azar: en una mesa tiene tres vasos (no transparentes) boca-abajo y dos bolitas que se colocan (juntas o por separado)

debajo de alguno de los vasos. Luego, con una habilidad y rapidez impresionante, el mago procede a mover las bolitas de un vaso a otro. En cada movimiento cambia de posición sólo una bolita. Esto lo hace incontables veces hasta que un jugador deseoso de apostar le dice "STOP". En ese momento el jugador tiene que escoger uno de los vasos. Si debajo de él están las DOS bolitas, gana. De lo contrario pierde. Para simplificar el juego, asuma que en cada movimiento el mago escoge con igual probabilidad cualquiera de las bolitas, y también equiprobablemente escoge a cuál de los OTROS vasos la cambia.

1. Muestre que el juego anterior se puede modelar como una Cadena de Markov en tiempo discreto con sólo 6 estados. Constrúyala. Identifique los estados y especifique cuáles son las probabilidades de transición.
2. Sea  $r_k$  el número de vasos vacíos en el estado  $k$ , y  $\pi_k = (3 - r_k)/9$ . Demuestre que el vector definido por los  $\pi_k$  corresponde a una ley estable del sistema.
3. Argumente si la cadena anterior admite o no probabilidades estacionarias. En caso que su respuesta sea positiva, cuánto valen?. Explique intuitivamente por qué hay estados con mayor probabilidad estacionaria que otros.
4. Ignorando el hecho que usted pueda tener una vista muy aguda, a priori, cuál es la probabilidad de ganar el juego?. Considere que usted escoge equiprobablemente cualquiera de los tres vasos y que el mago hace "muchos" movimientos antes de que usted le diga "STOP".