



Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: Rafael Epstein, Pablo Rey, Denis Sauré

Aux : Cristián Berner, Andrés Neely, Daniel Yung

## SOLUCIÓN CLASE AUXILIAR 8 SEPTIEMBRE DE 2004

### Problema 1

Sea  $N(t)$  el proceso de llegada de gente a la automotora.

1. Claramente  $Q(t)$  no es un proceso de Poisson homogéneo. Dado que la tasa de llegada de este proceso depende el número de unidades vendidas la propiedad de incrementos estacionarios y la de incrementos independientes no se cumplirán.

Filtraremos el proceso  $N(t)$  respecto a clientes que comprar el **primer** auto y clientes que no. La probabilidad que un cliente cualquiera compre el primer auto es  $\bar{F}(P(1))$ . Por lo tanto el proceso de llegada de clientes que compren el primer auto es Poisson de tasa  $\lambda \cdot \bar{F}(P(1))$ .

Notamos que este proceso de Poisson es idéntico al proceso de venta de automóviles  $Q(t)$  hasta que el primer auto es vendido. En este instante nuestro proceso filtrado mantiene su tasa  $\lambda \bar{F}(P(1))$  mientras que  $Q(t)$  pasa a tener una tasa  $\lambda \bar{F}(P(2))$ . Dado que nuestros cálculos se refieren a instantes menores o iguales al instante de venta del primer auto el desarrollo es válido para  $Q(t)$ .

Por otro lado nosotros sabemos que los tiempos entre llegadas de un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  son variables aleatorias exponenciales de parámetro  $\lambda$ . Por esto tendremos que:

$$E[x_1] = \int_0^\infty t \cdot \lambda \bar{F}(P(1)) \cdot e^{-\lambda \bar{F}(P(1))t} dt = \frac{1}{\lambda \bar{F}(P(1))}$$

2. Nuevamente filtramos  $N(t)$ . El proceso de personas que llegan hasta la automotora y no comprar, para  $t$  menores al instante de venta del primer auto es Poisson de tasa  $\lambda \cdot F(P(1))$ .

Entonces  $N(t) - Q(t)$  hasta el instante de la primera venta se comporta como un proceso de Poisson de tasa  $\lambda \cdot F(P(1))$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[N(t)|x_1 = t] &= 1 + E[N(t) - Q(t)] \\ &= 1 + \lambda \cdot F(P(1)) \cdot t \end{aligned}$$

3. Como vimos, si filtramos el proceso de llegada de clientes hasta el instante de la venta del primer auto concluiremos que el proceso de venta hasta ese instante es Poisson de tasa  $\lambda \bar{F}(P(1))$ . Desde ese instante en adelante (y reiniciando nuestro reloj) tendremos que el proceso de llegada de clientes que compren es Poisson de tasa  $\lambda \bar{F}(P(2))$ . De esta forma, desde el instante de la venta

del (i-1)-ésimo automóvil el proceso de venta es Poisson de tasa  $\lambda \bar{F}(P(i))$  hasta el instante de venta del i-ésimo. Ahora, dado que el tiempo entre arribos de un proceso de Poisson se distribuye exponencial tendremos que:

$$E[\text{Tiempo total de venta}] = \sum_{i=1}^C x_i$$

Donde  $x_i \rightsquigarrow \exp(\lambda \cdot \bar{F}(P(i)))$ , tiempo entre llegadas del proceso. De esta forma:

$$E[\text{Tiempo total de venta}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^C \frac{1}{\bar{F}(P(i))}$$

4. Claramente de la parte 1  $x_1 \rightsquigarrow \exp(\lambda \cdot \bar{F}(P(1)))$ . Condicionando sobre el instante de venta del primer auto vemos que (suponiendo que  $P(1) \neq P(2)$ ):

$$\begin{aligned} P[Q(t) = 1] &= \int_0^t P[Q(t) = 1 | x_1 = s] \cdot \lambda \cdot \bar{F}(P(1)) e^{-\lambda \cdot \bar{F}(P(1))s} ds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda \cdot \bar{F}(P(2))(t-s)} \cdot \lambda \cdot \bar{F}(P(1)) e^{-\lambda \cdot \bar{F}(P(1))s} ds \\ &= \frac{\bar{F}(P(1))}{\bar{F}(P(1)) - \bar{F}(P(2))} \left[ e^{-\lambda \bar{F}(P(2))t} - e^{-\lambda \bar{F}(P(1))t} \right] \end{aligned}$$

5. Calculemos primero la probabilidad de no haber vendido el auto. Sean:

$N^x(t)$  = proceso de llegada de gente que no se lleva lápices y que compra.

$N^l(t)$  = proceso de llegada de gente que se lleva lápices.

Hasta  $x_1$ ,  $N^x(t)$  tiene tasa  $\lambda \cdot \bar{F}(P(1)) \cdot (1-q)$  y  $N^l(t)$  tiene tasa  $\lambda \cdot q$ . Ahora simplemente debemos imponer que ninguno de estos tipos haya llegado hasta t y además que de los n que se llevaron lápices ninguno haya comprado. Esto es:

$$\begin{aligned} P[x_1 > t | N^l(t) = n] &= P[N^x(t) = 0] \cdot F(P(1))^n \\ &= e^{-\lambda \cdot \bar{F}(P(1)) \cdot (1-q) \cdot t} \cdot F(P(1))^n \end{aligned}$$

Entonces la probabilidad que buscamos es:

$$P[x_1 \leq t | N^l(t) = n] = 1 - P[x_1 > t | N^l(t) = n]$$

6. Encontraremos  $P[x_1 \leq s | Q(t) = 1]$ , con  $t \geq s$ , usando el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P[x_1 \leq s | Q(t) = 1] &= \frac{P[Q(s) = 1 | Q(t) = 1]}{P[Q(t) = 1]} \\ &= \frac{P[Q(t) = 1 | Q(s) = 1] \cdot P[Q(s) = 1]}{P[Q(t) = 1]} \end{aligned}$$

Pero

$$P[Q(t) = 1 | Q(s) = 1] = e^{-\lambda \bar{F}(P(2))(t-s)}$$

Utilizando el resultado del punto 4 vemos que:

$$P[x_1 \leq s | Q(t) = 1] = \frac{e^{-\lambda \bar{F}(P(2))(t-s)} \cdot \left[ e^{-\lambda \bar{F}(P(2))s} - e^{-\lambda \bar{F}(P(1))s} \right]}{\left[ e^{-\lambda \bar{F}(P(2))t} - e^{-\lambda \bar{F}(P(1))t} \right]}$$

Entonces  $f(x_1 | Q(t) = 1) = \frac{d(P[x_1 \leq s | Q(t) = 1])}{ds}$

Sea  $R(t)$  el número de clientes que han llegado dado que hasta  $t$  solo se ha vendido un auto. A partir del instante de la primera venta la intensidad de llegada (la tasa) varia. Entonces para responder esta parte debemos identificar el punto en el cual la tasa varia. Sin embargo nosotros sabemos la distribución de dicho punto (de parte anterior). Definiendo  $N_i(t)$  como un proceso de Poisson de tasa  $\lambda \cdot F(P(i))$ , tendremos que:

$$\begin{aligned} E[R(t) | x_1 = s] &= 1 + E[N_1(s)] + E[N_2(t-s)] \\ &= 1 + (\lambda \cdot F(P(1)) \cdot s) + (\lambda \cdot F(P(2)) \cdot (t-s)) \end{aligned}$$

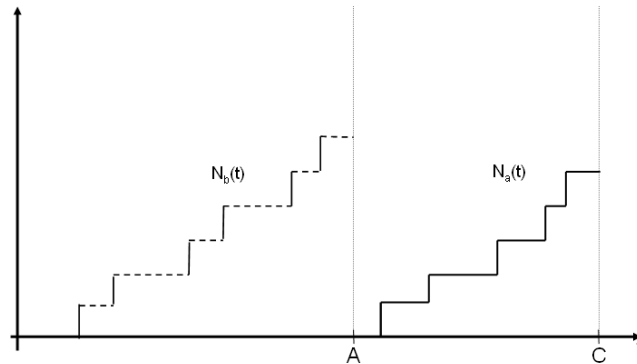
Descondicionando:

$$\begin{aligned} E[R(t)] &= \int_0^t E[R(t) | x_1 = s] \cdot f(s | Q(t) = 1) ds \\ &= 1 + \int_0^t (\lambda \cdot F(P(1)) \cdot s) + (\lambda \cdot F(P(2)) \cdot (t-s)) \cdot f(s | Q(t) = 1) ds \end{aligned}$$

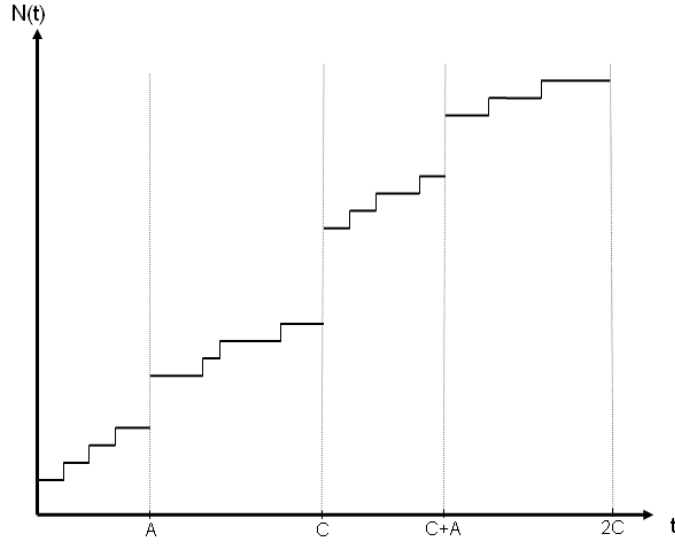
No es necesario desarrollar más la expresión.

## Problema 2

- (1,0 pts) Sean  $\{N_a(t) : t \geq 0\}$ ,  $\{N_b(t) : t \geq 0\}$  y  $\{N_T(t) : t \geq 0\}$  los procesos de conteo asociados al número de autos que cruzan la calle a, la calle b y ambas, respectivamente. El diagrama de autos que cruzan la intersección (por una calle en particular) es la que se muestra en la figura a continuación:



Entonces la dinámica del total de autos que cruza por alguna de las calles es la siguiente:



Para calcular la distribución de los autos que cruzan la intersección en un ciclo hay que notar que, dada la definición del ciclo, cruzaran todos los autos que llegan por la calle a durante un tiempo C y todos los que llegan por la calle b en el mismo tiempo. Entonces  $N_a(C)$  sigue un proceso de Poisson de tasa  $\lambda_a$ , y  $N_b(C)$  sigue un proceso de Poisson de tasa  $\lambda_b$ . Por suma de procesos de Poisson es directo que  $N_T(C)$  sigue un proceso de Poisson de tasa  $(\lambda_a + \lambda_b)$ . Es importante notar que solo para intervalos de largo C se cumple esta propiedad (dado que solo en esos instantes han cruzado todos los autos que han llegado al cruce).

2. (1,0 pts) Cada uno de los autos que cruzo el ciclo (dada la respuesta a la pregunta (a)) tiene una probabilidad  $\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b}$  de haber cruzado por la calle a. Para ver esto solo basta pensar en que la llegada de autos por la calle a viene de la división del proceso de Poisson  $N_T(C)$  (de tasa  $\lambda_a + \lambda_b$ ) con probabilidad  $\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b}$  (si multiplican la tasa y la prob. recuperan el proceso original). Entonces, dado que llegaron n tindre que:

$$P[N_a(C) = k | N_T(C) = n] = \binom{n}{k} \left( \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \right)^k \cdot \left( \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} \right)^{n-k}$$

Es decir una distribución binomial de parámetros  $n$  y  $(\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b})$ .

3. (1,0 pts) Veamos esto como un proceso de Poisson filtrado. Si un auto llega (por a) en el instante  $s$  (medido desde el comienzo del ciclo) tiene la siguiente probabilidad de haber esperado para cruzar:

$$P[s] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq s < A \\ 1 & \text{si } A \leq s < C \end{cases}$$

Entonces independiente del instante de llegada, cada uno de estos  $N$  autos tiene una probabilidad  $p$  de haber tenido que esperar, donde:

$$p = \int_0^C \frac{P[s]}{C} ds = \int_0^A \frac{0}{C} ds + \int_A^C \frac{1}{C} ds = 1 - \frac{A}{C}$$

Donde se utilizo la distribución uniforme  $[0, C]$  de las llegadas condicionadas de un proceso de Poisson. Sea  $N(t)_{Ea}$  el número de autos que ha cruzado hasta  $t$  pero que ha debido esperar la luz

verde. Entonces tendremos que:

$$P[N(C)_{Ea} = k | N_a(C) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Es decir una distribución binomial de parámetros  $n$  y  $p$ .

4. (1,0 ptos) Sea  $N_{NE}(t)$  el número de autos que ha cruzado hasta  $t$  y que no espera luz verde para cruzar. Nuevamente veamos el cuento como un proceso de Poisson filtrado (en particular será muy parecido a lo que hicimos en la clase auxiliar).

Si un auto llega en el instante  $s$  (medido desde el comienzo del ciclo) tiene la siguiente probabilidad de cruzar inmediatamente.

$$P[s] = \begin{cases} \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} & \text{si } 0 \leq s < A \quad (\text{la probabilidad de llegar por a}) \\ \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} & \text{si } A \leq s < C \quad (\text{la probabilidad de llegar por b}) \end{cases}$$

Noten que estamos filtrando  $N_T(C)$ .

Entonces tendremos que la prob. descondicionada del instante de llegada será:

$$p = \int_0^C \frac{P[s]}{C} ds = \int_0^A \frac{1}{C} \cdot \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} ds + \int_A^C \frac{1}{C} \cdot \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} ds = \frac{[\lambda_b \cdot A + \lambda_a \cdot (C - A)]}{C \cdot \lambda_a + \lambda_b}$$

Entonces tendremos que:

$$P[N(C)_{NE} = k | N_T(C) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Es decir una distribución binomial de parámetros  $n$  y  $p$ .

5. (2,0 ptos) Es fácil ver que el costo total tiene solo 2 componentes, una asociada a los autos que vienen por a y esperan, y la otra asociada a los autos que vienen por b y esperan.

Entonces (dad que en un ciclo la distribución de los autos que vienen por a y esperan es Poisson de tasa  $\lambda_a \cdot B$  y que de la misma forma, la distribución de los autos que vienen por b y esperan es Poisson de tasa  $\lambda_b \cdot A$ ) tendremos que:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo ciclo}] &= E[\text{Autos por a}] + E[\text{Autos por b}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por a} | N_a(B) = n] \cdot P[N_a(B) = n] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por b} | N_b(A) = n] \cdot P[N_b(A) = n] \end{aligned}$$

Ahora, si un auto que llega por a, lo hace a  $s$  unidades de tiempo desde que se comenzó la luz roja, incurrirá en un costo igual a  $M \cdot (B - s)$ . Sin embargo dada la distribución uniforme de los tiempos de llegada de un Poisson uniforme, tendremos que este costo  $C$  será:

$$C = \int_0^B \frac{M \cdot (B - s)}{B} ds = \frac{M \cdot B}{2}$$

Es fácil ver que:

$$E[\text{Autos por a} | N_a(B) = n] = n \cdot \frac{M \cdot B}{2}$$

La misma lógica entrega el siguiente resultado para la calle b:

$$E[\text{Autos por a} | N_a(B) = n] = n \cdot \frac{M \cdot A^2}{3}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo ciclo}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por a} | N_a(B) = n] \cdot P[N_a(B) = n] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por b} | N_b(A) = n] \cdot P[N_b(A) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ n \cdot \frac{M \cdot B}{2} \right] \cdot P[N_a(B) = n] + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ n \cdot \frac{M \cdot A^2}{3} \right] \cdot P[N_b(A) = n] \\ &= \frac{\lambda_a \cdot M \cdot B^2}{2} + \frac{\lambda_b \cdot M \cdot A^3}{3} \end{aligned}$$

Dudas, consultas y comentarios a  
crberner@ing.uchile.cl