



Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: Rafael Epstein, Pablo Rey, Denis Sauré

Aux : C. Berner, A. Neely, D. Yung.

CLASE AUXILIAR 8 SEPTIEMBRE DE 2004

Problema 1

El lanzamiento del último modelo de una conocida marca de automóviles ha revolucionado el mercado nacional. Armijo Catalan, dueño de la franquicia de dicha marca, cuenta con un stock limitado de C de estos bólidos. Nuestro amigo, consciente del impacto de una buena política de precios en la rentabilidad del negocio ha decidido cobrar un precio de $P(i)$ [u.m.] por la venta del i -ésimo automóvil, esto es el primer auto se venderá en $P(1)$ [u.m.], el segundo se venderá en $P(2)$ [u.m.], etc.

Armijo ha estudiado largamente la demanda por automoviles de última generación y estima que la llegada de clientes con intenciones de comprar uno de estos se puede modelar como un proceso de Poisson de tasa λ [Clientes/hora].

Armijo sabe que Z_k (el máximo precio que el k -ésimo cliente en llegar esta dispuesto a pagar) es una variable aleatoria de distribución común F . De esta forma el k -ésimo cliente en llegar solo comprará un bólido si el precio de venta es menor o igual a su precio de reserva Z_k .

Sea $Q(t)$ el proceso de conteo de autos vendidos hasta el instante t .

1. (1,0 ptos.) Argumente el porque $Q(t)$ no un proceso de Poisson homogéneo ¿Cual es la esperanza de x_1 , tiempo transcurrido hasta la venta del primer automóvil?
2. (1,0 ptos.) Si el primer automóvil se vende en el instante $x_1 = t$, ¿cual es la esperanza del número de clientes que han llegado a la automotora hasta ese instante?.
3. (1,0 ptos.) Calcule la esperanza del tiempo transcurrido hasta que todos los autos son vendidos.
4. (1,5 ptos.) Encuentre $P[Q(t)=1]$

Armijo Catalan desea que ninguno de sus clientes se vaya con las manos vacías por lo que les ofrece gratis un precioso bolígrafo. Un cliente que llega a la automotora (independiente de si compra o no) aceptará el lápiz con probabilidad q . Suponiendo que Armijo cuenta con muchos bolígrafos, responda:

6. (1,5 ptos.) Si hasta t se han llevado n lápices, ¿cual es la probabilidad que el primer auto ya haya sido vendido?
7. (Bonus, 1,5 ptos.) Encuentre la distribución de x_1 , el instante de la primera venta, condicional en que $Q(t) = 1$.¹ Con esto encuentre la esperanza del número de clientes que han visitado la automotora hasta el instante t condicional en que se ha vendido tan solo 1 automóvil.

¹Utilice que $P[x_1 \leq s | Q(t) = 1] = P[Q(s) = 1 | Q(t) = 1]$

Problema 2

Suponga que la intersección de dos calles unidireccionales, que llamaremos a y b , está regulado por un semáforo, tal como se ilustra en la figura. El semáforo funciona en un ciclo de C unidades de tiempo, de las cuales un tiempo A corresponde a luz verde para la calle a y un tiempo B verde para la calle b (sólo hay luces verdes y rojas).

Por la calle a llegan autos según un proceso de Poisson de tasa $\lambda_a[\frac{\text{autos}}{u.t.}]$, mientras que por la calle b llegan autos según un Proceso de Poisson de tasa $\lambda_b[\frac{\text{autos}}{u.t.}]$. Los autos que llegan a la intersección y encuentran la luz en verde cruzan inmediatamente, pero si encuentran el semáforo en rojo deben esperar hasta el próximo cambio de luz, momento en que cruzan instantáneamente la intersección (el tiempo que demoran en cruzar es despreciable).

Si ambas calles son lo suficientemente anchas como para que no se formen colas y no está permitido que los vehículos doblen en este cruce, conteste las siguientes preguntas:

1. (1,0 pts) Realice un diagrama que muestre el número de automóviles esperando cruzar la intersección en una de las dos calles (por ejemplo la calle a) en función del tiempo y otro que muestre el número total de automóviles que han cruzado la intersección en función del tiempo. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzan la intersección en 1 ciclo del semáforo? HINT: Considere que un ciclo termina cuando cruzan instantáneamente los autos esperando en la calle para la cuál el ciclo comienza y termina cuando cae la luz verde.
2. (1,0 pts) Si en un ciclo cruzaron en total N autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzaron por la calle a ?
3. (1,0 pts) Si en un ciclo cruzaron la intersección N_a autos por la calle a , ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número de autos que tuvo que esperar por cruzar?
4. (1,0 pts) Si en un ciclo cruzaron en total N autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que NO tuvo que esperar por cruzar?

Suponga ahora que los automovilistas que circulan por la calle a perciben un costo igual a $\$M \cdot t$, donde t es el tiempo que deben esperar antes de poder cruzar, mientras que para los automovilistas que circulan por la calle b este costo queda bien modelado por la expresión $\$M \cdot t^2$

5. (2,0 pts) Calcule el costo esperado incurrido por los automovilistas que esperan en un ciclo del semáforo. HINT: Puede ser útil calcular la esperanza del tiempo que debe permanecer un automovilista frente a la luz roja, condicional a que llega cuando la luz está roja.

