



Solución Clase Auxiliar 18 de Agosto, 2004  
Programación Dinámica Estocástica

## Problema 1

1. El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica intertemporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar .

■ **Etapas:**

- Cada uno de los meses del horizonte de planificación.

■ **Variables de estado:**

$S_i$  = Número de productos disponibles al inicio del mes  $i$

$\hat{S}_i$  = Número de productos que llegaran el proximo mes debido a atraso de ordenes

■ **Variables de decisión:**

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si ordeno productos para el próximo mes} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$x_i$  = Número de productos que ordeno para el próximo mes

■ **Variable aleatoria:**

$p = P[\text{Una orden se retrase un mes}]$

$q = P[\text{Un cliente demande una unidad de producto}]$

■ **Función de beneficio acumulado (incorpora recursión):**

- Etapa  $T+1$ :

$$V_{T+1}^*(S_{T+1}, \hat{S}_{T+1}) = 0$$

- Etapa  $i$ :

$$\begin{aligned} V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i) = & \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} \left[ P \cdot \min\{S_i, n\} - i \cdot \max\{n - S_i, 0\} \right. \\ & + (1-p) \cdot [V_{i+1}^*(\min\{L, S_i - \min\{S_i, n\} + x_i + \hat{S}_i, 0\})] \\ & \left. + p \cdot [V_{i+1}^*(\min\{L, S_i - \min\{S_i, n\} + \hat{S}_i, X_i)] \right] \\ & - K \cdot y_i - c \cdot x_i \end{aligned}$$

Donde:

$$V_i^*(S_i, \hat{S}_i) = \max_{0 \leq x_i \leq L \cdot y_i} [V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i)]$$

- Condiciones de borde:

$$S_1 = S$$

$$\hat{S}_1 = 0$$

2. En este caso se debería incluir una variable de estado que nos indicase cuantos clientes se dejaron insatisfechos en el período anterior. De esta forma, para un período dado y condicionando sobre la demanda realizada, se puede tener el número de clientes insatisfechos durante el período. Con estas cifras se puede calcular la probabilidad de que el número de clientes insatisfechos dos meses continuos sea j, y por lo tanto, se podría modelar la situación e incluir los cambios las leyes de probabilidades de las demandas período a período.

3. Dados estos datos la solución es la siguiente<sup>1</sup>:

- Período 3:

$S_3$	$\hat{S}_3$	$X_3 = 0$	$X_3 = 1$	$X_3 = 2$	$V_3^*$	$X_3^*$
0	—	0	—15	—20	0	0
1	—	11,25	—3,75	—8,75	11,25	0
2	—	15	0	—5	15	0

- Período 2:

$S_2$	$\hat{S}_2$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$V_2^*$	$X_2^*$
0	0	0	—6	—8	0	0
0	1	11,25	—0,75	d	11,25	0
0	2	23	d	d	23	0
1	0	14,0625	6,5625	3,8125	14,0625	0
1	1	25,4375	17,4875	d	25,4375	0
1	2	34,25	d	d	34,25	0
2	0	26,375	18,325	15,675	26,375	0
2	1	i	i	i	i	i
2	2	i	i	i	i	i

- Período 1:

$S_1$	$\hat{S}_1$	$X_1 = 0$	$X_1 = 1$	$X_1 = 2$	$V_1^*$	$X_1^*$
1	0	14,7656	12,9218	17,5125	17,5125	2

---

<sup>1</sup>i denota infactibilidad y d denota solución dominada

## Problema 2

1. El modelo de programación dinámica estocástica es el siguiente:

- Etapas:

Cada uno de los paraderos,  $k \in \{1, \dots, K\}$

- Estados:

$N_k$  = Número de pasajeros en el bus antes de parar (o no) en el paradero  $k$ .

- Decisión:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si se detiene en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Variable aleatoria:

$j_k$  = Número de personas que desean subirse en el paradero  $k$ .

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si lo detiene un carabinero en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Recurrencia:

$$N_{k+1} = X_k \cdot \min\{C, N_k + j_k\} + (1 - X_k) \cdot N_k$$

- Función de Beneficios:

Para el último período solo recibimos un bono si llegamos con el lleno. Además no consideraremos el costo de parar acá (es un costo fijo).

$$V_{K+1}^*(N_{K+1}) = \begin{cases} F & \text{si } N_{K+1} = C \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Para el resto de los períodos la función de beneficios toma la siguiente forma:

$$V_k^*(N_k) = \max\{V_k(N_k, 0), V_k(N_k, 1)\}$$

Donde:

$$V_k(N_k, 1) = -D + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ P_k \cdot \min\{C - N_k, j\} + V_{k+1}^*(\min\{C, N_k + j\}) \right] \cdot S_j$$

y

$$V_k(N_k, 0) = -C_{inf}(1 - S_0) \cdot P_{Multa} + V_{k+1}^*(N_k)$$

- Condiciones de borde:

$$N_1 = 0$$

2. Consideremos la tabla para el último período:

Período 10:

$N_{10}$	0	1	$X_{10}^*$	$V_{10}^*$
30	3110	3000	0	3110
29	-1890	2950	1	2950
28	-1890	1200	1	1200
27	-1890	-1300	0	-1300

Período 9:

$N_9$	0	1	$X_9^*$	$V_9^*$
30	1220	1110	0	1220
29	1060	1544	1	1544
28	-690	1555	1	1555
27	-3190	525	1	525

Período 8:

$N_8$	0	1	$X_8^*$	$V_8^*$
30	-670	-780	0	-670
29	-346	-297,6	1	-297,6
28	-335	83,1	1	83,1
27	-1365	146,5	1	146,5

Período 7:

$N_7$	0	1	$X_7^*$	$V_7^*$
27	-1743,5	-1363,1	1	-1363,1

Revisen los números porque no estoy 100 % seguro de ellos.

La estrategia óptima de detenciones es la siguiente: Detenerse en el paradero 7.

Si se llega con menos de 30 personas al paradero 8, detenerse. Si no seguir de largo.

En el paradero 9 detenerme solo si no tengo 30 personas en el bus.

En el paradero 10 detenerse si hay 28 o 29 personas en el bus.

### Problema 3

1. Siguiendo los pasos característicos tendremos:

- **Etapas:** Cada uno de los hoteles.
- **Variable de estado:**

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{Si ya encontré habitación en algún hotel} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable de decisión:**

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{Si entro a preguntar al hotel i-ésimo} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Variable aleatoria:**

$$w_i = \begin{cases} 1 & P_i & \text{Si hay habitación} \\ 0 & 1 - P_i & \text{Si no} \end{cases}$$

- **Condición de borde:**

$$\begin{aligned} V_k^*(1) &= 0 \\ V_{N+1}^*(0) &= K \end{aligned}$$

- **Recurrencia:**

$$V_k(0, q_k) = q_k(Q + P_k \cdot S_k + (1 - P_k) \cdot V_{k+1}^*(0)) + (1 - q_k) \cdot (V_{k+1}^*(0) + C_k)$$

Asumiendo  $C_N = 0$ . Entonces:

$$V_k^*(0) = \max_{q \in \{0,1\}} V^*(0, q)$$

2. Resolvemos:

- **Etapla 4:**

$$V_4^*(0) = 450$$

- **Etapla 3:**

$$\begin{aligned} V_3^*(0, 1) &= 100 + 0,4 \cdot 150 + 0,6 \cdot 450 = 430 \\ V_3^*(0, 0) &= 450 \end{aligned}$$

Implica que  $q_3^* = 1$  y que  $V_3^*(0) = 430$

- **Etapla 2:**

$$\begin{aligned} V_2^*(0, 1) &= 100 + 0,6 \cdot 250 + 0,4(100 + 430) = 462 \\ V_2^*(0, 0) &= 100 + 430 = 530 \end{aligned}$$

Implica que  $q_2^* = 1$  y que  $V_2^*(0) = 462$

- **Etapla 1:**

$$\begin{aligned} V_1^*(0, 1) &= 100 + 0,8 \cdot 500 + 0,2(100 + 462) = 612 \\ V_1^*(0, 0) &= 100 + 462 = 562 \end{aligned}$$

Implica que  $q_1^* = 0$  y que  $V_1^*(0) = 562$

Dudas y/o errores:  
Daniel Yung M.  
dyung@ing.uchile.cl