



Clase Auxiliar 18 de Agosto, 2004  
Programación Dinámica Estocástica

## Problema 1

Considere una tienda que cada mes debe decidir cuanto ordenar de un determinado producto. El costo de cada unidad de producto es  $\$c$  y existe un costo fijo de poner una orden igual a  $\$K$ . Se sabe que en general, el tiempo en que se demora en llegar una orden es de 1 mes (lo que se ordena 1 mes estará disponible para el mes siguiente), pero existe una probabilidad  $p$  que la orden se atrase y demore 2 meses en llegar. Una orden nunca demora más de 2 meses en llegar.

Actualmente la tienda tiene  $N$  clientes, cada uno de los cuales demandará una unidad de producto en un mes con una probabilidad  $q$ . El precio de venta es  $\$P$  ( $P > c$ ). Además, si llega un cliente y no hay unidades en stock se incurre en un costo  $\$i$  por cada uno de ellos.

Por otra parte, la bodega en que se almacena el producto es de capacidad limitada y sólo permite guardar  $L$  unidades, con  $L \geq N$  (todas las unidades por sobre esta capacidad que intente almacenar serán dañadas perdiendo completamente su valor).

El dueño de la tienda actualmente cuenta con  $S$  unidades en la bodega y está interesado en contar con un sistema que le permita, mes a mes, decidir cuánto producto ordenar con el fin de maximizar sus utilidades para los próximos  $T$  períodos, fecha en que cerrará su negocio y las unidades de producto que sobren no tendrán valor comercial.

1. Formule el modelo de programación dinámica que permitiría apoyar las decisiones del dueño de la tienda. Escriba explícitamente las expresiones de los valores esperados que puedan aparecer en este modelo.
2. Explique esquemáticamente como incluiría en su modelo la siguiente situación: El dueño de la tienda sabe que si un cliente en 2 meses seguidos no encuentra el producto en stock se retirará indignado y nunca más volverá a la tienda lo que implica un costo  $I$ , con  $I \gg i$ .
3. Si actualmente no hay pedidos atrasados encuentre la política óptima para el dueño de la tienda para los siguientes valores numéricos:

$$\begin{array}{llll} c = 5 & K = 10 & p = 0,2 & L = 2 \\ N = 2 & q = 0,5 & P = 15 & i = 0 \\ & T = 3 & S = 1 & \end{array}$$

## Problema 2

Un microbus posee  $K$  paraderos en su recorrido, además de una estación terminal. El conductor del bus debe decidir antes de llegar a cada paradero si detenerse o no, y en caso que lo haga, suben todos los pasajeros

que esperan, siempre que no se supere la capacidad  $C$  del vehículo. El chofer puede decidir no detenerse, pero corre el riesgo de que un carabinero le curse una infracción (de valor  $\$C_{inf}$ ) con probabilidad  $P_{parte}$  en caso de dejar pasajeros en el paradero sin poder tomar el bus, es decir, que haya personas esperando.

La probabilidad de que  $j$  personas esperen tomar el bus es  $S_j$ , para todos los paraderos.

El precio del pasaje para un pasajero que sube en el  $k$ -ésimo paradero es  $P_k$ .

Suponga que los pasajeros solo se bajan en la estación terminal y que el Ministerio de Transporte le entrega un premio de  $\$F$  al chofer si llega al terminal con su capacidad copada. El costo de cada detención que real es de  $\$D$ .

1. Formule un modelo de programación dinámica que le permita al chofer maximizar su beneficio neto por recorrido realizado.
2. Resuelva el modelo suponiendo que el autobus se aproxima al séptimo paradero de un total de 10, llevando 27 pasajeros cómodamente sentados. Considere:  
 $P_k = 500$ ,  $C = 30$ ,  $F = 5000$ ,  $D = 2000$ ,  $P_{parte} = 0,7$ ,  $C_{int} = 3000$ ,  $S_0 = 0,1$ ,  $S_1 = 0,4$  y  $S_2 = 0,5$

### Problema 3

Usted ha decidido ir a mochilear a Bongwutsi, un pequeño país africano. Luego de arribar al aeropuerto de Bongwutsi, usted se encuentra al comienzo de la calle principal listo para buscar alojamiento.

Según la información de la guía, se sabe que a lo largo de la calle existen los únicos  $N$  hoteles de la ciudad. Cada hotel está separado por 3 cuadras del siguiente. La probabilidad que el hotel  $i$ -ésimo tenga habitación disponible es  $P_i$ , donde  $P_i$  es decreciente en  $i$  (si no hay habitación, usted no puede quedarse en ese hotel). El precio de hotel  $i$  es  $S_i$ , también decreciente en  $i$ . Si pasa frente a uno de los hoteles y no entra, usted no puede regresar a él. En buenas cuentas, usted sólo puede recorrer la calle una vez, de principio a fin, sin volver atrás.

Los costos considerados son los siguientes:

- Costo de caminar desde el hotel  $i$ -ésimo al  $i + 1$  es  $C_i$ , creciente en  $i$ .
- Costo de entrar a preguntar a un hotel, si hay o no habitación disponible, es igual a  $Q$  para todos los hoteles (refleja la caminata hacia el interior del lugar y la pérdida de tiempo en aquello).
- Si luego de pasar a lo largo de toda la calle usted no se queda en ningún hotel, tiene un costo residual de dormir en la calle valorado en  $K$ .

A usted lo único que le interesa es minimizar el costo total, independiente de la calidad del hotel en el cual se hospeda.

1. Formule un modelo de programación dinámica que le permita resolver el mismo problema en el caso general. Fundamentalmente intuitivamente, por qué es útil usar programación dinámica para resolver este problema.
2. Resuelva el modelo para los siguientes parámetros:  
 $N = 3$        $P_1 = 0,8$        $P_2 = 0,6$        $P_3 = 0,4$   
 $S_1 = 500$        $S_2 = 250$        $S_3 = 150$   
 $Q = C_1 = C_2 = 100$        $K = 450$