



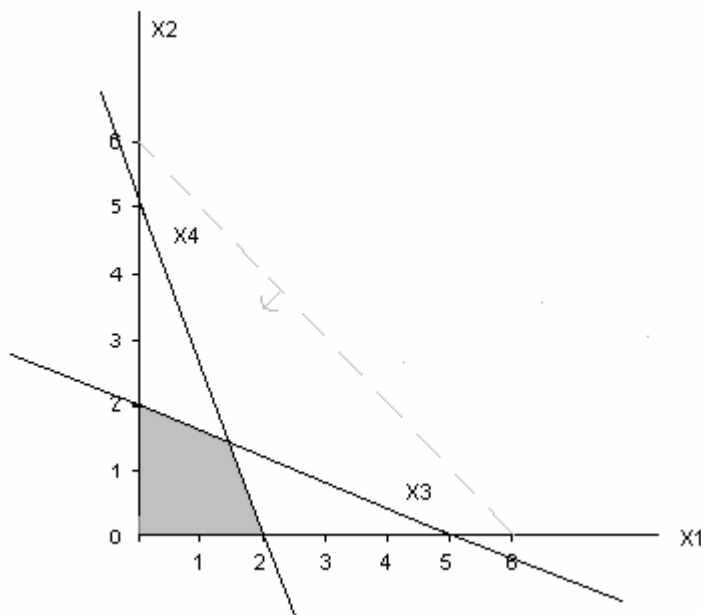
Pauta Control 2 IN34A
6 de Octubre de 2004

Problema 1

Dado el siguiente problema (P):

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Máx} \quad z = c^T x = x_1 + x_2 \\ & \text{s.a} \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & \quad \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(i)



(ii)

Llevemos el problema a la forma estándar para Simplex.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Empezando desde el origen:

$$B = \begin{matrix} X_3 & X_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow R = \begin{matrix} X_3 & X_4 \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = I^{-1} \rightarrow \bar{b} = b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (-1, -1) \leq 0 \quad \text{Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que indistintamente } X_1 \text{ o } X_2 \text{ pueden entrar a la base}$$

Criterio de Salida:

$$\min \begin{matrix} X_3 & X_4 \\ \left\{ \frac{10}{5}, \frac{10}{2} \right\} \end{matrix} = \min \{2, 5\} = 2 \quad X_3 \text{ sale de la base}$$

Iteración 1 (si se saca X_2)

$$B = \begin{matrix} X_2 & X_4 \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow R = \begin{matrix} X_1 & X_4 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (-1, 0) - (-1, 0) \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 0) + (1/5, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (-1, 0) + (2/5, 1/5) = \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 \\ X_1 & X_3 \end{pmatrix} \quad \text{Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que } X_1 \text{ entra a la base pueden entrar a la base}$$

$$\bar{A}_{\bullet 1} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 1} = B^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 21/5 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min \begin{matrix} X_2 & X_4 \\ \left\{ \frac{2}{2/5}, \frac{6}{21/5} \right\} \end{matrix} = \min \left\{ 5, \frac{30}{21} \right\} = 10/7 \quad X_4 \text{ sale de la base}$$

Iteración 1 (si se saca X_1)

$$B = \begin{matrix} & X_3 & X_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow R = \begin{matrix} & X_4 & X_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0, -1) - (0, -1) \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0, -1) + (1/5, 2/5) = (1/5, -3/5)$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_2 entra a la base pueden entrar a la base

$$\bar{A}_{\bullet 1} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 1} = B^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min \left\{ \frac{6}{21/5}, \frac{2}{2/5} \right\} = \min \left\{ 30/21, 5 \right\} = 10/7 \quad X_3 \text{ sale de la base}$$

Ambas iteraciones arrojan la misma base para la iteración 2

Iteración 2:

$$B = \begin{matrix} & X_2 & X_1 \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow R = \begin{matrix} & X_4 & X_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/21 & -2/21 \\ -2/21 & 5/21 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 30/21 \\ 30/21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 10/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0, 0) - (-1, -1) \begin{pmatrix} 5/21 & -2/21 \\ -2/21 & 5/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0, 0) + (1, 1) \begin{pmatrix} -2/21 & 5/21 \\ 5/21 & -2/21 \end{pmatrix} = (3/21, 3/21) \geq 0 \Rightarrow \text{óptimo}$$

$$z = \frac{-10}{7} - \frac{10}{7} = \frac{-20}{7} = z^*$$

Observemos que, en el óptimo, ambas restricciones son activas.

(iii) En el problema inicial se tiene que $c=(1,1)$

Así si se consideran $c = (c_1, c_2)$ arbitrarios.

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0) - (-c_1, -c_2) \begin{pmatrix} 5/21 & -2/21 \\ -2/21 & 5/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0,0) + (c_1, c_2) \begin{pmatrix} -2/21 & 5/21 \\ 5/21 & -2/21 \end{pmatrix} = \left(\underbrace{-\frac{2c_1}{21} + \frac{5c_2}{21}}_{X_4}, \underbrace{\frac{5c_1}{21} - \frac{2c_2}{21}}_{X_3} \right) \geq 0 \Rightarrow \text{óptimo}$$

- X_4 entra a la base si el costo reducido asociado se hace negativo lo que sucede cuando:

$$c_2 \leq \frac{2}{5} c_1$$

Si esto sucede nos movemos al punto (0,2) lo que implica que la base queda como:

$$B = \begin{pmatrix} \overset{X_2}{5} & \overset{X_4}{0} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Así el rango en el cual se mantiene el óptimo encontrado en la parte (ii) es:

$$\frac{2}{5} c_1 \leq c_2 \leq \frac{5}{2} c_1$$

Cuando x_4 entra a la base la segunda restricción se hace inactiva y, como simplex se mueve a los vértices adyacentes, sabemos que x_4 es inactiva, lo que indica que estamos en el punto (0,2)

- X_3 entra a la base si el costo reducido asociado se hace negativo lo que sucede cuando:

$$c_1 \leq \frac{2}{5} c_2$$

Si esto sucede nos movemos al punto (2,0) lo que implica que la base queda como:

$$B = \begin{pmatrix} \overset{X_3}{1} & \overset{X_1}{2} \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Así el rango en el cual se mantiene el óptimo encontrado en la parte (ii) es:

$$\frac{2}{5} c_2 \leq c_1 \leq \frac{5}{2} c_2$$

Cuando x_3 entra a la base la primera restricción se hace inactiva y, como simplex se mueve a los vértices adyacentes, sabemos que x_4 es inactiva, lo que indica que estamos en el punto (2,0)

Problema 2

1.-a) Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con costo reducido nulo (y que tiene rango factible para crecer), el problema admite puntos óptimos alternativos.

b) Si, si estoy en una solución degenerada y la variable básica que vale 0 debería pasar a valores negativos si hiciéramos crecer la variable no básica correspondiente al costo reducido negativo.

En este caso, puedo entonces cambiar la base pero sin modificar la solución factible básica.

2.-a): Suponer que el dual es factible y ver que entonces existe una cota para el primal, usando el teorema débil de dualidad.

Si suponemos sin pérdida de generalidad el siguiente problema primal-dual.

$$\begin{aligned} \text{(P) Min } z &= c^t x \\ \text{s.a. } Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(D) Max } w &= y^t b \\ \text{s.a. } A^t y &\leq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

El teorema débil de dualidad nos dice que:

$$Z(x^*) \geq W(y^*)$$

Si el primal es no acotado, no puede existir una cota inferior para z , por lo que el dual se torna infactible, dado que w disminuye hasta infinito.

b) Dar un ejemplo de primal y dual infactibles.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{(P) Min } z &= 2x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a. } 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 4x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(D) Max } w &= 6y_1 + 4y_2 \\ \text{s.a. } 3y_1 + 4y_2 &\leq c \\ 2y_1 + y_2 &\leq -2 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3- a) Aplicaría Simplex a partir de la base B^* correspondiente a x^* .

b) Dado que los costos reducidos no se vieron afectados, si x^* no es óptimo es porque dejó de ser factible. Por ello no puedo en este caso aplicar Simplex a partir del óptimo del primal. En cambio, puedo aplicar Simplex en el dual a partir del óptimo del dual (dado que en el dual no perdí factibilidad porque estoy cambiando un coeficiente correspondiente en el este problema a la función objetivo).

Problema 3:

Variables decisión:

t_i : instante en que se inicia la visita a la novia i 0.5ptos

X_{ij} : 1 si visito a la novia j a continuación de la i 0.5ptos
0 si no.

Función objetivo:

$$\min \sum_{i=1}^N C_i t_i \quad 0.5 \text{ ptos}$$

Restricciones: Cada restricción tiene 0.5 ptos

$t_j > t_i + T_i - (1 - X_{ij})M \quad \forall i, j=1, \dots, N$ Debe iniciarse la visita j en un instante mayor al i si es que se decide visitarla a continuación de la i . M es un número grande.

$\sum_{i=1}^N X_{i, N+1} = 1$ Existe solo una última visita.

$\sum_{j=1}^N X_{0, j} = 1$ Existe solo una primera visita.

$\sum_{i=1}^N X_{i, j} = 1$ Solo una visita puede precedir a la j . $\forall j=1, \dots, N$

$\sum_{j=1}^N X_{i, j} = 1$ Solo una visita puede suceder a la i . $\forall i=1, \dots, N$

$X_{ii}=0 \quad \forall i=1, \dots, N$ No puedo visitar dos veces seguidas a la misma novia.

$t_i \leq 24*7 \quad \forall i=1, \dots, N$ Todas las visitas se deben iniciar antes de 1 semana

$t_j = t_i + a \quad a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \forall i, j=1, \dots, N$ No se puede hincar dos citas simultáneamente

$X_{ij} \in \{0, 1\}, t_i \geq 0$ Naturaleza de las variables.

Nota de corrección: Recordar que un PPL se puede plantear de varias formas, aplicar criterio.