Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Blas Duarte
Sebastián Guzmán
Marianela Pereira

Clase Auxiliar

Miércoles 08 de Septiembre, 2004

Pregunta 1

Ricardo Ramírez, distinguido alumno de *injeniería*, debe decidir cómo distribuir los $\$I$ que recibe semanalmente de sus generosos padres.

Para facilitar la decisión ha dividido todos los bienes y servicios que puede adquirir en dos categorías: los *básicos* y los *suntuarios*. Ricardo ha determinado que, en promedio, el precio unitario de un bien *básico* es $\$P_b$, mientras que el precio unitario de un bien *suntuario* es de $\$P_s$.

Existe una cantidad mínima de unidades de bienes *básicos* (relacionados con locomoción, alimentación, fotocopias, etc.) igual a M_b que deben ser consumidos cada semana. Por otra parte, la cantidad de dinero que invierta en productos *suntuarios* no puede ser superior a tres veces la invertida en productos *básicos*.

Además, Ricardo sabe que para disfrutar de los productos *suntuarios* necesita de T_s minutos por unidad adquirida, y sólo dispone de H horas libres a la semana.

Considere que los bienes no se pueden inventariar, y que Ricardo recibe un beneficio igual a f_s por unidad de bien *suntuario* adquirida y un beneficio de f_b por cada unidad `por sobre el mínimo` de bienes *básicos* consumidos.

1. Formule un modelo de PL continua que permita a Ricardo decidir cuánto dinero invertir en bienes *básicos* y *suntuarios* en una semana.

En lo que sigue considere los siguientes valores para los parámetros:

I	$= \$60.000$
P_b	$= \$500$
P_s	$= \$1.200$
T_s	$= 90$ minutos
H	$= 15$ horas
M_b	$= 20$ unidades
f_b	$= 1.000$
f_s	$= 3.000$

2. Dibuje el espacio de soluciones factibles. Encuentre gráficamente la solución óptima de este problema.

3. ¿Qué ocurre con la solución óptima (restricciones activas/inactivas) si ahora Ricardo dispone de todo el día para consumir los bienes *suntuarios*? (suponga que no gasta tiempo en consumir los bienes *básicos*). ¿Cuánto es el valor mínimo de f_s para que Ricardo siga consumiendo bienes *suntuarios*?. ¿Es posible que exista alguna función objetivo que permita que en este modelo alguna semana a Ricardo quede alguna fracción del dinero que le entregan sus padres?.

Problema 2

Armijo Catalán, destacado profesor de la Universidad Diego Machuca, está organizando sus horas para compatibilizar sus clases con las horas destinadas a su polola. Para esto Armijo cuenta con 30 horas semanales y sabe que por cada hora destinada a hacer clases debe destinar una hora extra para prepararla.

La Universidad le ha exigido que al menos debe hacer 6 horas de clases a la semana, mientras que su polola se siente ignorada si Armijo no le dedica al menos 10 horas semanales, por lo que de no cumplir con este número de horas se irá a buscar quien le preste más atención.
Por último Armijo se ha enterado que su polola es muy celosa, por lo que si dedica 10 horas más a hacer clases que lo que le dedica a ella, ésta se pondrá celosa y terminará su relación con Armijo.

Ayude a Armijo Catalán a solucionar su problema, sabiendo que una hora dedicada a su polola le proporciona 3 unidades de satisfacción (U.S.) y que cada hora destinada a hacer clases le proporciona 2 U.S., pare esto se pide:

1. Formular un modelo de PL continua que permita a Armijo decidir cuánto tiempo destinar a hacer clases y cuánto a su polola.

2. Dibuje el espacio de soluciones factibles y encuentre gráficamente la solución óptima de este problema.

3. Armijo siente que su interes por las clases crece, determine cuánto es lo máximo que podría crecer la utilidad (valorado en U.S.) que las clases le proporcionan sin que varíe la solución óptima encontrada.

4. Armijo ha descubierto que su polola es más celosa que lo que él creía, determine cuánto es lo máximo que pueden variar los celos de la polola (desde el punto de vista del máximo de horas de diferencia entre lo que dedica a ella y a sus clases) de modo que la solución encontrada siga siendo óptima.

Pauta Pregunta 1

1. `Definición de Variables`:

   - $X_b \equiv$ Cantidad de dinero gastada en bienes *básicos* en una semana
   - $X_s \equiv$ Cantidad de dinero gastada en bienes *suntuarios* en una semana

   `Función Objetivo`:

   $$\text{máx}\left\{\left(\frac{X_b}{P_b} - M_b\right)\cdot f_b + \frac{X_s}{P_s}\cdot f_s\right\}$$

   `Restricciones`:

   $$\begin{aligned} X_b + X_s &\leq I & (1)\\ 3\cdot X_b &\geq X_s & (2)\\ \frac{X_b}{P_b} &\geq M_b & (3)\\ \frac{X_s}{P_s}\cdot T_s &\leq H\cdot 60 & (4)\\ X_s,\ X_b &\geq 0 & (5) \end{aligned}$$

   Donde la restricción (1) corresponde a la restricción presupuestaria, la segunda a no gastar en productos *suntuarios* más de tres veces lo que se gasta en *básicos*, la restricción (3) obliga a consumir el mínimo de unidades en productos *básicos*, la restricción (4) asegura que tendremos el tiempo suficiente para consumir todos los productos *suntuarios* que se adquieran en una semana, y por último la restricción (5) asegura la no negatividad de las variables de decisión.

2. El espacio de soluciones factibles, junto con la solución óptima del problema se muestran en la siguiente figura.

Figura 1

3.

- Si Ricardo dispone de todo el día para consumir productos *suntuarios* la restricción (4) se desplaza horizontalmente hacia arriba, por lo que el punto óptimo cambia pasando a ser $X_b = 45{,}000$, $X_s = 15{,}000$. En este caso la restricción presupuestaria continúa siendo activa y la restricción (2) pasa de ser inactiva a ser activa.
- Para que Ricardo siga consumiendo bienes *suntuarios* Ceteris Paribus (todo el resto constante) f_s debe ser mayor o igual que 2, el coeficiente de cada peso gastado en bienes *básicos* en la función objetivo. En el caso que $f_s = 2$ se tendrá que todos los puntos contenidos en el segmento DE serán óptimos, incluido el E donde $X_s = 0$, pero si $f_s > 2$ el óptimo será único (el punto E) y Ricardo invertirá todo su dinero en bienes de tipo *básico*.
- Si Ricardo valora en CERO el dinero gastado en bienes *básicos* la función objetivo será una recta paralela al eje de X_b. De esta manera ya no tendremos un único punto óptimo, sino que se podrá elegir cualquier punto perteneciente al segmento CD del dibujo, de manera que es posible que la restricción presupuestaria no sea activa en el óptimo, y a Ricardo le sobre dinero.

Problema 2

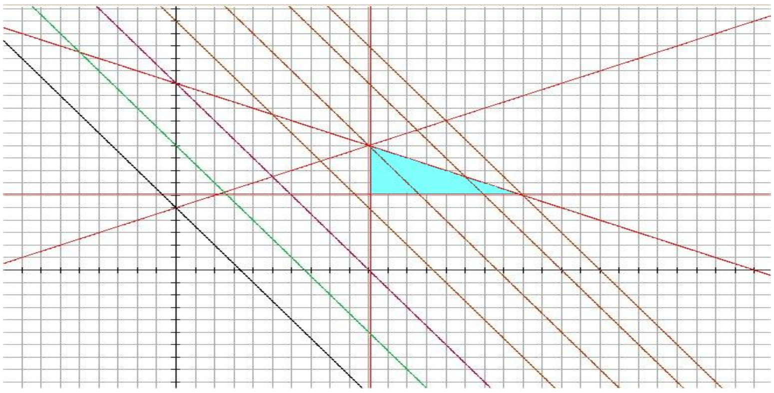
1. `Variables de Decisión`:
   X: Número de horas dedicadas a la polola
   Y: Número de horas dedicadas a hacer clases

   `Función Objetivo`:
   $$\max\{2 \cdot Y + 3 \cdot X\}$$

   `Restricciones`:
   $$\begin{aligned} 2 \cdot Y + X &\leq 30 && (6) \\ 2 \cdot Y - X &\leq 10 && (7) \\ Y &\geq 6 && (8) \\ X &\geq 10 && (9) \\ X, Y &\geq 0 && (10) \end{aligned}$$

   Dada la poca claridad del enunciado, la segunda restricción (2) se puede reemplazar por
   $$Y - X \leq 10$$

2. Graficando el modelo anteriormente planteado se obtiene el siguiente gráfico:

   Así vemos que la solución óptima es el punto (18,6)

3. El óptimo cambia cuando la función objetivo se hace paralela a la restricción (1), es decir, cuando la función objetivo es $6 \cdot Y + 3 \cdot X$, con esto el valor de las clases puede aumentar hasta 6 [U.S.]

4. La solución deja de ser óptima cuando la restricción (2) hace infactible el punto óptimo, lo cual ocurre cuando X = 18 e Y = 6 en (2), es decir en 12 - 18 = -6. Con esto el óptimo cambia cuando la polola exige verlo 6 horas más que lo que dedica a clases.