

IN34A: OPTIMIZACIÓN

Pauta pregunta I

$$\text{mín } z = -8x_1 - x_2$$

s.a.

$$-x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \geq 0$$

a) Gráfico:

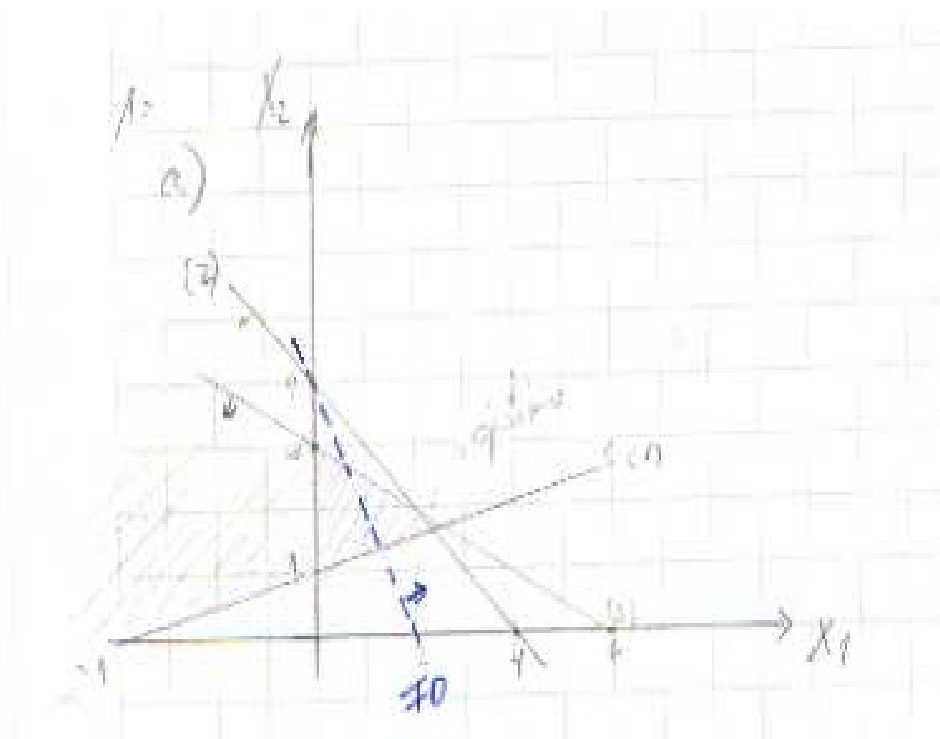


Figura 1: Grafico asociado al problema .

de el gráfico se ve que las restricciones activas son 1 y 2, esto implica:

$$\begin{array}{l} s.a. \\ -x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{array}$$

de donde se llega a los siguientes valores:

$$\begin{array}{l} x_2 = 8/5 = 1,6 \\ x_1 = 12/5 = 2,4 \end{array}$$

por lo tanto el optimo es:

$$\vec{x}^* = (1,6; 2,4)$$

esto implica que el optimo es:

$$z^* = -8 \cdot 12/5 - 8/5 = -20,8$$

b) el problema dual queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{máx } w = 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 \\ s.a. \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 = -8 \\ 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq -1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2, y_3 \leq 0 \end{array}$$

como tenemos el valor optimo en el problema primal, y sabemos que la restriccion 3 no es activa, entonces por el teorema de holgura complementaria se tiene que

$$y_3 = 0$$

pues:

$$(A_3 \cdot X - b_3) \cdot y_3 = 0$$

y como la restriccion no es activa, y3 debe ser cero. Ademas se sabe que x1 y x2 son positivas, por lo que las restricciones asociadas a estas variables son activas, esto implica:

$$\begin{array}{l} -y_1 + 2y_2 = -8 \\ 4y_1 + 2y_2 = -1 \end{array}$$

de donde se llega a los siguientes valores:

$$\begin{array}{l} y_1 = 7/5 = 1,4 \\ y_2 = 12/5 = -3,3 \end{array}$$

esto implica que el valor optimo para el dual es:

$$w^* = -20,8$$

que es lo que uno esperaria, pues el dual y el primal en el optimo deben ser iguales.

2.- a) Por el teorema debil de dualidad se tiene que:

$$z(\bar{x}) \leq w(\bar{y}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \text{ factibles}$$

por lo tanto si el primal es no acotado, $\lim_{\bar{x} \rightarrow x^*} z(\bar{x}) = \infty$ por lo que el espacio factible para el dual queda vacio, pues $\nexists \bar{y}$ tal que $\infty \leq w(\bar{y})$ (la demostracion del teorema debil de dualidad no es necesaria).

b) si puede ocurrir, y esto se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\text{mín } z = x_1 - x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ x_1 + x_2 & \leq & -1 \\ x_1 & \leq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

y el dual quedaria:

$$\text{mín } z = y_1 - y_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcl} y_1 + y_2 & \geq & 1 \\ y_1 + y_2 & \leq & -1 \\ y_1 & \geq & 0 \\ y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Es claro que pueden haber muchos ejemplos, hay que fijarse que realmente sean ambos infactibles, y tambien pueden haber demostraciones analiticas

Dudas, consultas y comentarios a:
frcister@mi.cl